

# Lokale und globale Algorithmen zur Approximation mit erweiterten B-Splines



Vom Fachbereich Mathematik  
der Technischen Universität Darmstadt  
zur Erlangung des Grades eines  
Doktors der Naturwissenschaften  
(Dr. rer. nat.)  
genehmigte  
**Dissertation**

von  
**Dipl.-Math. Jennifer Susanne Mae Prasiswa**  
aus Wuppertal

Referent:	Prof. Dr. U. Reif
Korreferent:	Prof. Dr. K. Höllig
Tag der Einreichung:	25. Mai 2009
Tag der mündlichen Prüfung:	09. Juli 2009

Darmstadt 2009  
D17



# Inhaltsverzeichnis

<b>Einleitung</b>	<b>1</b>
<b>1. Splines</b>	<b>5</b>
1.1. B-Splines . . . . .	5
1.1.1. Univariate B-Splines . . . . .	6
1.1.2. Univariate duale Funktionale . . . . .	7
1.1.3. Tensorprodukt-B-Splines . . . . .	8
1.1.4. Multivariate duale Funktionale . . . . .	11
1.2. Gewichtete, erweiterte und gewichtete erweiterte B-Splines . . . . .	12
1.2.1. Gewichtete Splines . . . . .	13
1.2.2. Erweiterte Splines . . . . .	16
1.2.3. Gewichtete erweiterte Splines . . . . .	20
1.2.4. Stabilität der erweiterten Splineräume . . . . .	21
1.2.5. Quasiinterpolation und Approximationskraft . . . . .	25
<b>2. Approximation mit Zwei-Schritt-Methoden</b>	<b>27</b>
2.1. Grundlagen . . . . .	28
2.1.1. Zwei-Schritt-Methoden mit erweiterten B-Splines . . . . .	28
2.1.2. Approximationsgebiete . . . . .	30
2.2. Approximationsgüte . . . . .	36
2.2.1. Zwei-Schritt $L^2$ -Approximation . . . . .	40
2.3. Globale Approximation . . . . .	42
2.3.1. Globale $L^2$ -Approximation . . . . .	44
<b>3. Approximation gestreuter Daten</b>	<b>45</b>
3.1. Least Squares Fit mit erweiterten B-Splines . . . . .	47
3.1.1. Fehler der Zwei-Schritt-Methode . . . . .	47
3.1.2. Einfluss der Datenpunktanzahl . . . . .	49
3.2. Gewichteter Least Squares Fit mit erweiterten B-Splines . . . . .	52
3.2.1. Fehler der Zwei-Schritt-Methode . . . . .	53
3.2.2. Fehler der globalen Methode . . . . .	56
3.3. Numerische Resultate . . . . .	58
3.3.1. Dichte Daten . . . . .	59
3.3.2. Dünnere Daten . . . . .	62

<b>4. Hole-Filling mit erweiterten B-Splines</b>	<b>67</b>
4.1. Randstetige Füllung . . . . .	69
4.1.1. Ansatz . . . . .	69
4.1.2. Shortley-Weller-Verfahren . . . . .	70
4.1.3. Algorithmische Umsetzung . . . . .	78
4.1.4. Gewichtsfunktion als Anwendung . . . . .	82
4.2. Erzeugen eines $C^k$ -stetigen Übergangs . . . . .	86
4.2.1. Ansatz . . . . .	86
4.2.2. Erstes Beispiel für eine $C^2$ -stetige Füllung . . . . .	90
4.2.3. Glätten des füllenden Splines . . . . .	91
4.3. Übertragbarkeit der Verfahren auf den $\mathbb{R}^d$ . . . . .	96
<b>Fazit und Ausblick</b>	<b>103</b>
<b>A. Anhang</b>	<b>105</b>
A.1. Funktionenräume . . . . .	105
A.2. Gauß-Seidel-Verfahren . . . . .	107
A.3. Weitere Beispiele für das Hole-Filling . . . . .	107
A.4. Programmpaket . . . . .	112
<b>Literaturverzeichnis</b>	<b>119</b>



# Einleitung

Die Methode der Finiten Elemente ist in den Ingenieurwissenschaften zur Lösung von Differentialgleichungen weit verbreitet. Wichtig ist dabei die Wahl des Ansatzraumes. Sollen Tensorprodukt-B-Splines auf beliebigen Gebieten zur Lösung von Differentialgleichungen mit der Finite-Elemente-Methode verwendet werden, so ergeben sich zwei Probleme: Das erste besteht in der Einhaltung von Dirichlet-Randbedingungen. Standard-Tensorprodukt-B-Splines büßen am Gebietsrand deutlich an Approximationskraft ein, wenn man die Einhaltung von Randbedingungen erzwingt. Noch bedeutender ist die mangelnde Stabilität der Basisfunktionen, die immer dann auftritt, wenn man nicht rechteckige Gebiete betrachtet. Bei solchen Gebieten treten häufig Splines mit sehr kleinen Trägern auf; diese zerstören die Stabilität der zu berechnenden Gleichungssysteme. Zur Lösung der genannten Probleme haben Höllig, Reif und Wipper [35] neue Splineräume vorgeschlagen, die sogenannten gewichteten und erweiterten B-Splines, kurz web-Splines. Diese lösen auf elegante Weise beide angesprochenen Probleme, ohne dass die einfache Struktur der Basiselemente zerstört wird. Es gibt eine Reihe von Arbeiten, die gewichtete erweiterte B-Splines erfolgreich im Bereich der Finite-Elemente-Methode verwenden [35, 34, 45].

Diese Arbeit untersucht, in wieweit sich die Vorteile der Erweiterung auch bei Approximationsproblemen ausnutzen lassen. Sie geht also der Frage nach, ob sich die guten Approximationseigenschaften der Standard-Tensorprodukt-B-Splines auf rechteckigen Gebieten auch auf beliebige glatt berandete Gebiete ausweiten lassen. Erweiterte B-Splines der Ordnung  $n$  können auf genügend glatt berandeten Gebieten eine hinreichend glatte Funktion mit einer Genauigkeit der Größenordnung  $\mathcal{O}(h^n)$  approximieren, wobei  $h$  die Gitterweite des Splineranges ist [32]. Für konkrete Approximationsalgorithmen wurde jedoch bisher nicht gezeigt, dass diese im Sinne der obigen Fehlerschranke optimal sind.

Diese Arbeit konzentriert sich auf die sogenannten Zwei-Schritt-Algorithmen [51], bei denen das Approximationsgebiet zuerst in mehrere kleine Gebiete unterteilt wird. Auf diesen wird lokal approximiert und diese lokalen Approximationen werden dann zu einer globalen kombiniert. Die gute Parallelisierbarkeit der Zwei-Schritt-Algorithmen ist ein großer Vorteil gegenüber direkten globalen Lösungen. Es ist möglich, hinreichende Bedingungen an Zwei-Schritt-Approximationsalgorithmen mit erweiterten B-Splines zu formulieren, unter denen diese im Sinne des allgemeinen Resultats optimal sind. Dabei spielt es keine Rolle, ob kontinuierliche oder diskrete lokale Approximationsalgorithmen verwendet werden. Auch ist es möglich, im ersten Schritt andere Approximationsräume

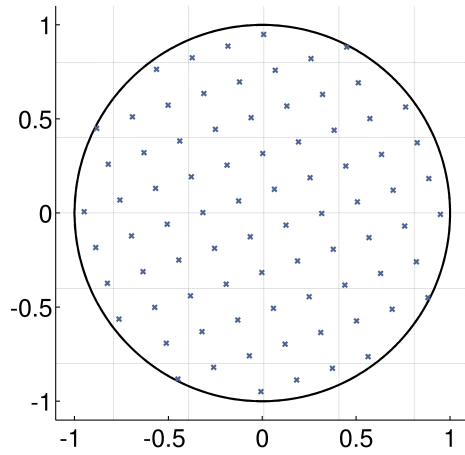
zu wählen, als den im zweiten Schritt verwendeten erweiterten B-Spliner Raum.

Im Fokus stehen hier Algorithmen zur Approximation gestreuter Daten. Dieses aktuelle Forschungsgebiet hat eine Reihe von Anwendungen in verschiedenen Bereichen der angewandten Mathematik. Sie beschäftigen sich zum Beispiel mit dem Erstellen von Höhenmodellen für geographische Software oder mit der Flächenrekonstruktion aus Punktwolken von 3-D-Scannern mit Anwendungen in der Computergrafik und der bildgebenden Medizintechnik. Ein Großteil der verwendeten Algorithmen ist gitterlos, besonders Radiale Basisfunktionen kommen oft zum Einsatz [60, 44, 59]. Dem Vorteil dieser Methoden, der hohen Approximationskraft, stehen zwei Nachteile gegenüber: die hohe Anzahl an Freiheitsgraden – typischerweise ein Freiheitsgrad pro Datenpunkt – und die mangelnde numerische Stabilität, die durch aufwändige Verfahren verbessert werden muss. Approximationen mit Splines sind bei mehrdimensionalen Anwendungen bisher fast ausschließlich auf polygonalen beziehungsweise polyedrischen Gebieten untersucht worden [40, 11]; dabei werden Splines auf Triangulierungen verwendet. Die Approximationen weisen Fehlern der Größenordnung  $\mathcal{O}(h^n)$  auf, falls Makro-Elemente entsprechender Glattheit zur Verfügung stehen. Für Probleme hoher Dimension ist das Verwenden von Triangulierungen unpraktikabel.

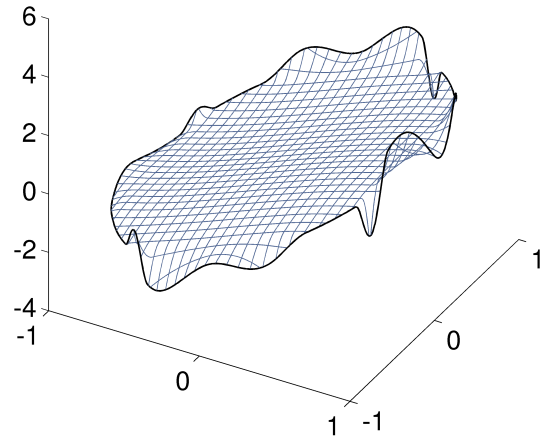
Standard-Tensorprodukt-B-Splines werden bisher nur auf rechteckigen Gebieten beziehungsweise Boxen verwendet. Der Grund dafür ist, dass bei beliebig berandeten Gebieten Stabilitätsprobleme auftreten [33, 12]. Dies veranschaulicht Abbildung 0.1. Gezeigt ist ein Beispiel für die Approximation gestreuter Daten mit Tensorprodukt-B-Splines auf einer Kreisscheibe. Die zu approximierenden Datenwerte stammen von der Funktion  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x, y) = 2 \sin(x) + y^3$ . Die Position der Datenpunkte bezüglich des Splinegitters sind im linken Teil der Abbildung gekennzeichnet. Wie im rechten Teil der Abbildung deutlich zu erkennen ist, weist die mit der Methode der kleinsten Fehlerquadrate berechnete Approximation am Rand deutliche Abweichungen von  $f$  auf – sogenannte Randartefakte. Damit im engen Zusammenhang steht, dass die zu lösenden Gleichungssysteme oft schlecht konditioniert sind. Das erste Kapitel greift dieses Beispiel auf und zeigt, dass mit erweiterten Splines Randartefakte vermieden werden können.

Bei Approximationen mit Tensorprodukt-B-Splines auf Gebieten treten also zwei grundsätzliche Probleme auf: Schlecht konditionierte Gleichungssysteme und Randartefakte. Hinzu kommt, dass sich eine hohe lokale Datendichte bei ungünstiger Datenpunkt-konstellation negativ auf die Approximationsgüte auswirkt – ein Problem, das auch bei anderen Ansatzräumen auftritt. Die hier und zum Teil auch in [15] präsentierten Methoden zeigen, dass es möglich ist mit erweiterten B-Splines lokale und globale Algorithmen zu konstruieren, die keines dieser Probleme aufweisen und sich trotzdem durch Fehler der Größenordnung  $\mathcal{O}(h^n)$  auszeichnen.

Algorithmen zur Approximation gestreuter Daten haben über die bereits erwähnten Anwendungsgebiete hinaus das Potenzial zur effizienten Konstruktion einer Gewichtsfunktion – also einer Funktion, die am Rand des Gebietes verschwindet und im Inneren



(a) Datenpunkte



(b) Approximationsergebnis

Abbildung 0.1.: Approximation gestreuter Daten mit Standard-Tensorprodukt-B-Splines auf nicht-rechteckigem Gebiet

strikt positiv ist. Die bereits erwähnten gewichteten erweiterten B-Splines benötigen solche Funktionen. Die Konstruktion von Gewichtsfunktionen ist, von Spezialfällen abgesehen, nicht trivial. Eine bekannte Methode zur Konstruktion von glatten Gewichtsfunktionen auf beliebigen Gebieten ist die von Dyken und Floater vorgeschlagene Methode der Transfiniten-Mittelwert-Interpolation [22]. Eine effiziente Methode zur automatisierten Berechnung von Gewichtsfunktionen zu finden, ist eines der Ziele der allgemeinen Untersuchungen zur Approximation mit erweiterten Splines. Der hier gewählte Ansatz ist zweistufig. In einem ersten Schritt wird auf einem feinen Gitter eine approximative Lösung einer Poisson-Gleichung mit Nullrandbedingung berechnet. Im zweiten Schritt werden die auf diese Weise gewonnenen gestreuten Daten approximiert, wobei erweiterte Splines zur Approximation verwendet werden.

Es ist gelungen, die Methode zur Konstruktion der Gewichtsfunktion so zu verallgemeinern, dass es mit ihrer Hilfe möglich ist, einen Hole-Filling-Algorithmus für beliebig berandete Gebiete zu konstruieren. Das heißt, einen Algorithmus, der es erlaubt eine Funktion, die auf einem das Gebiet  $\Omega$  umgebenden Gebiet gegeben ist, durch eine Füllung auf  $\Omega$  fortzusetzen. Dies ist ein im Reverse-Engineering weit verbreitetes Problem. Oft kommt es dabei nicht nur auf die Randstetigkeit der Füllung an, es sollen auch krümmungsstetige Übergänge konstruiert werden. So zum Beispiel, wenn in CAD-Anwendungen möglichst glatte Übergänge zwischen gegebenen Splineflächen benötigt werden. Einige Hole-Filling-Algorithmen sind Subdivisionsschemata [28, 41, 42, 37].

Diese erzeugen beim Füllen  $N$ -seitiger Lücken typischerweise stetig differenzierbare Übergänge; im besten Fall sind die Grenzflächen fast überall krümmungstetig. Ob die entstehenden Flächen am Rand approximativ oder genau sind, hängt maßgeblich von den Randdaten ab. Weitere bekannte Algorithmen arbeiten auf polygonalen Netzen [10, 9, 55]. Mit Makro-Elementen [47] können im  $\mathbb{R}^2$  im approximativen Sinne  $C^k$ -stetige Flächen erzeugt werden. Allerdings sind Makro-Elemente hoher Glattheit schwer zu konstruieren. Auch die Übertragung auf das trivariate Problem ist schwierig und es besteht eine Beschränkung auf  $N$ -seitige Lücken. Im Gegensatz dazu zeichnen sich die Algorithmen mit erweiterten B-Splines durch eine höhere Flexibilität hinsichtlich des Gebiets und eine geringe Anzahl an Freiheitsgraden aus.

Die vorliegende Arbeit ist wie folgt gegliedert:

Das erste Kapitel gibt einen kurzen Einblick in die Splinetheorie, wobei der Fokus auf den gewichteten und erweiterten B-Splines liegt. Es zeigt allgemeine Resultate zur Approximationsgüte dieser Splineräume auf und führt das nötige Handwerkszeug für die theoretischen Untersuchungen ein.

Das zweite Kapitel formuliert hinreichende Bedingungen an optimale Approximationsalgorithmen mit erweiterten B-Splines, insbesondere werden die sogenannten Zwei-Schritt-Methoden analysiert. Hier finden sich die Hauptresultate zur Approximationsgüte. Als erste Beispielmethode wird die  $L^2$ -Approximation auf Gebieten untersucht. Darauf aufbauend untersucht das dritte Kapitel die Approximation von gestreuten Daten. Ausgehend von der weit verbreiteten Methode der kleinsten Fehlerquadrate werden Zwei-Schritt-Algorithmen mit erweiterten Splines konstruiert und analysiert. Darüber hinaus werden in beiden Kapiteln Sätze über die Konvergenz globaler Methoden bewiesen.

Das vierte Kapitel widmet sich einer Anwendung der Approximationsalgorithmen, dem Hole-Filling. Insbesondere geht es um den diese Arbeit motivierenden Spezialfall: Die Konstruktion von Gewichtsfunktionen für beliebige Gebiete. Die hier dargestellte Anwendung hat mehr als Beispielcharakter, denn die automatisierte Konstruktion von Gewichtsfunktionen für beliebige glatte Gebiete war bisher nicht zufriedenstellend gelöst. Erste Tests zeigen, dass das hier präsentierte Verfahren für die web-Methode von großem Nutzen sein kann. Die Möglichkeit, für beliebige Gebiete im Rahmen der Fertigungstoleranzen glatte Füllungen zu erzeugen, eröffnet eine zweite Anwendung von eigenständigem Interesse. Ein kurzer Exkurs stellt das Shortley-Weller-Differenzenverfahren vor. Es zeigt sich unter anderem, dass die auftretenden Diskretisierungsmatrizen schon nach einfacher diagonaler Vorkonditionierung beschränkte Konditionszahlen aufweisen.

Alle Rechnungen zu den Beispielen basieren auf der Anwendung von Matlab. Die so entstandenen Programme werden im Anhang kurz erläutert. Daneben sind dort weitere Beispiele sowie eine kurze Einführung zu Funktionenräumen und dem Gauß-Seidel-Verfahren zu finden.

# 1. Splines

Für die Approximation glatter Funktionen sind Polynome nur eingeschränkt geeignet. Zwar wird der Fehler der polynomialen Approximationen, wie im berühmten *Weierstraßsche Approximationssatz* gezeigt, durch Erhöhung des Grades beliebig klein, aber Polynome von sehr hohem Grad zu verwenden ist unerwünscht. Auch das sogenannte *Runge-Beispiel* illustriert, dass Polynome in manchen Fällen trotz hohen Grades schlecht approximieren. Des Weiteren führt die globale Trägerstruktur der Polynombasen zu einer geringen Stabilität und dazu, dass kleine lokale Änderungen sich stets auf das gesamte Gebiet auswirken.

Diese Effekte machen es interessant, über andere Funktionenräume nachzudenken. Eine Möglichkeit sind Splineräume. *Splines*, also stückweise polynomiale Funktion, sind schon in den späten vierziger Jahren des letzten Jahrhunderts von Schoenberg in die Approximationstheorie eingeführt worden [50]. Ihre Weiterentwicklung in den folgende Jahrzehnten erfolgte vor allem durch für diverse Automobil- und Flugzeughersteller tätige Mathematiker. De Boor hat maßgeblich zur Entwicklung und Verbreitung der Splinetheorie beigetragen. Sein Buch [18] ist eines der Standardwerke auf diesem Feld und er hat den Begriff *B-Spline* geprägt.

Die Lokalität der B-Spline Basis führt dazu, dass die oben genannten Probleme gelöst werden können, ohne die den Polynomen eigene Einfachheit aufzugeben.

In diesem Kapitel soll zuerst ein kurzer Einblick in die B-Splinetheorie geben werden, um die verwendeten Notationen zu erklären. Wer sich einen Überblick über das Thema verschaffen möchte, sei auf de Boor [18], Farin (ed.) [23] und Hoschek, Lasser [36] verwiesen. Schließlich wird in Abschnitt (1.2) der Begriff der *erweiterten* und *gewichteten B-Splines* erläutert und deren Konstruktion beschrieben. Die wichtigsten Eigenschaften dieser von Höllig, Reif und Wipper [35, 33, 32] eingeführten *Splineräume* werden im Detail beschrieben.

## 1.1. B-Splines

Betrachten wir zunächst den univariaten Fall:

Ein *Spline*  $s$  der Ordnung  $n$  ist eine Funktion, die stückweise aus Polynomen der Ordnung  $n$  besteht, das heißt, aus Polynomen bis zum Grad  $n - 1$ . Dabei werden die einzelnen Polynomstücke durch sogenannte *Knoten*  $\tau_k$  getrennt. Die Knoten werden zu einer *Knotenfolge*  $T$  zusammengefasst. An einem  $i$ -fachen Knoten ist der Spline  $s$  mindestens  $(n - 1 - i)$  mal stetig differenzierbar.

Der Einfachheit halber sei  $T$  als monoton wachsende biinfinite Folge dargestellt, das heißt, es gelte

$$\tau_k \leq \tau_{k+1}, \quad k \in \mathbb{Z},$$

und

$$\lim_{k \rightarrow -\infty} \tau_k = -\infty, \quad \lim_{k \rightarrow \infty} \tau_k = \infty.$$

Wir fordern zusätzlich, dass  $\tau_k$  echt kleiner als  $\tau_{k+n}$  sei, da sonst degenerierte Träger auftauchen. Eine Knotenfolge, die diese Bedingung erfüllt, heißt *zulässig*. Alle Splines der Ordnung  $n$  zur zulässigen Knotenfolge  $T$  bilden den Funktionenraum  $\mathcal{S}_n(T)$ . Es gibt viele mögliche Basen für den Spliner Raum, hier wird ausschließlich die B-Spline-Basis betrachtet.

### 1.1.1. Univariate B-Splines

Es ist üblich, die B-Spline-Basis über Rekursion [18] zu definieren. Ebenso kann man abgebrochene Potenzen verwenden [52]. Eine weitere, sehr kompakte Darstellungsform bietet die Marsden-Identität. Dazu definiert man zuerst Polynomen  $\psi_k^n \in \mathbb{P}(\mathbb{R})$  der Form

$$\psi_k^n(x) := \prod_{i=1}^{n-1} (\tau_{k+i} - x). \quad (1.1)$$

Mit deren Hilfe ergibt sich:

**Definition und Satz 1.1.1** *Sei  $T$  eine zulässige Knotenfolge für einen Spliner Raum der Ordnung  $n$ . Dann existieren Funktionen  $b_k$ , die durch ihren Träger*

$$\text{supp } b_k \subseteq [\tau_k, \tau_{k+n}]$$

*und die Bedingung*

$$(t - \tau)^{n-1} = \sum_k b_k(t) \psi_k^n(\tau), \quad t \in \mathbb{R},$$

*eindeutig bestimmt sind. Diese werden B-Splines genannt. Sie bilden eine Basis des Spliner Raumes  $\mathcal{S}_n(T)$ .*

Jeder Spline  $s \in \mathcal{S}_n(T)$  kann als Linearkombination von B-Splines

$$s(t) = \sum_k c_k B_k(t)$$

dargestellt werden. Die Skalare  $c_k$  werden *Splinekoeffizienten* oder auch *Kontrollpunkte* genannt.

Die B-Splines bilden eine lokale und eine globale Basis, sie verfügen über einen kompakten Träger und bilden eine nicht-negative Partition der Eins. Diese Eigenschaften und

die damit einhergehende Stabilität qualifiziert sie unter anderem für die Implementierung von Spline-Algorithmen. Weiterhin genügen die B-Splines einer Rekursionsgleichung, das heißt, B-Splines der Ordnung  $n$  lassen sich aus B-Splines der Ordnung  $n - 1$  zusammensetzen. Dies kann mit Hilfe des de Boor-Algorithmus zur einfachen Auswertung genutzt werden. Integration und Differentiation sind als Operation auf die Splinekoeffizienten darstellbar; dies ist ebenfalls für die Implementierung von Vorteil. Abbildung 1.1 zeigt die drei quadratischen B-Splines, die durch die Knotenfolge  $[\dots, 1, 2, 4, 7, 11, 16, \dots]$  auf dem Intervall  $[4, 7]$  definiert sind. Hier wird bereits deutlich, dass man einem endlich-dimensionalen Vektorraum erhält, sobald man nur diejenigen B-Splines betrachtet, deren Träger einen nicht-leeren Schnitt mit einem bestimmten Intervall haben. Einige der oben erwähnten B-Spline-Eigenschaften sind in der Abbildung ebenfalls deutlich zu erkennen, unter anderen die Positivität, die Partition der Eins und die Lokalität der Träger.

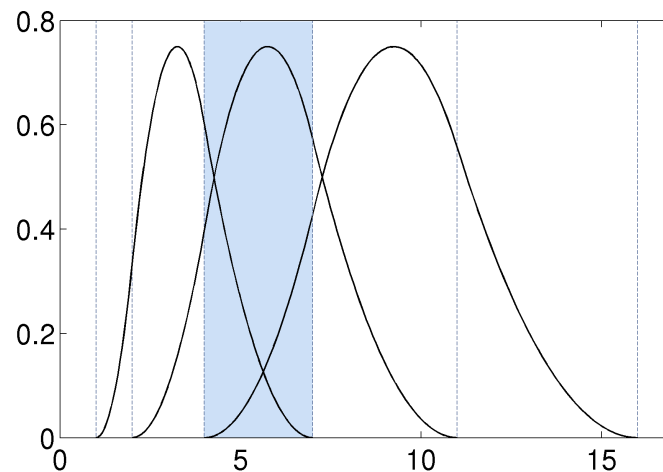


Abbildung 1.1.: Quadratische B-Splines bei nichtuniformem Gitter

### 1.1.2. Univariate duale Funktionale

Als Hilfsmittel bei theoretischen Untersuchungen eines Splineraumes sind die dualen Funktionale  $(\lambda_k)_{k \in \mathbb{Z}}$  sehr wichtig. Für diese gilt

$$\lambda_k(b_i) = \delta_{ki}$$

für alle  $k, i \in \mathbb{Z}$ . Mit ihnen ist es möglich, die Koeffizienten eines Spline  $s \in \mathcal{S}_n(T)$  bezüglich der B-Spline Basis zu berechnen, es ist

$$\lambda_k(s) = \lambda_k \left( \sum_{i \in \mathbb{Z}} c_i b_i \right) = \sum_{i \in \mathbb{Z}} c_i \lambda_k(b_i) = c_k.$$

Es gibt mehrere Möglichkeiten, zu den B-Splines duale Funktionale zu definieren. Hier werden zuerst die de Boor-Fix Funktionale [19] eingeführt:

**Definition und Satz 1.1.2** *Sei  $T$  eine zulässige Knotenfolge. Für jedes  $k \in \mathbb{Z}$  und beliebiges  $\tau \in [\tau_i, \tau_{i+n})$  wird durch*

$$\lambda_k^* f := \frac{1}{(n-1)!} \sum_{j=0}^{n-1} (-1)^{n-1-j} D^{n-1-j} \psi_k^n(\tau) D^j f(\tau)$$

*ein zum B-Spline  $b_k$  duales Funktional definiert. Dieses nennt man de Boor-Fix Funktional.*

Diese explizite Formel ist für viele theoretische Zwecke gut einsetzbar, insbesondere weil der Auswertungspunkt  $\tau$  relativ frei wählbar ist. Sie kann nur auf Funktionen angewendet werden, die mindestens  $n-1$  mal stetig differenzierbar sind. Diese Restriktion kann man durch die Wahl anderer Funktionale umgehen, wie im Abschnitt über mehrdimensionale duale Funktionale geschildert.

### 1.1.3. Tensorprodukt-B-Splines

Eine einfache Möglichkeit, multivariate Splines zu definieren, ist es, Tensorprodukte eindimensionaler Splines zu bilden. Betrachten wir zuerst die Knotenfolge. Wir definieren

$$T := [T^1, T^2, \dots, T^d]$$

als multivariate Knotenfolge im  $\mathbb{R}^d$ . Die Knotenfolgen  $T^\iota$  seien zulässig bezüglich der Ordnung  $n^\iota$ . Hier und im Folgenden sei der hochgestellte Index dafür reserviert, die Komponenten eines  $d$ -dimensionalen Objekts zu unterscheiden, das heißt  $\iota = 1, \dots, d$ . Der Tensorprodukt-Spliner Raum sei dann

$$\mathcal{S}_n^d(T) := \bigotimes_{\iota=1}^d \mathcal{S}_{n^\iota}(T^\iota),$$

wobei der Vektor  $n = (n^1, n^2, \dots, n^d)$  die Ordnung des Spliner Raumes in den verschiedenen Komponenten angibt. Bildet man das Tensorprodukt der B-Splines  $b_{k^\iota}^{n^\iota}$  an einer Stelle  $t = (t^1, t^2, \dots, t^d)$ , so ergibt sich

$$(b_{k^1}^{n^1} \otimes \dots \otimes b_{k^d}^{n^d})(t) = b_{k^1}^{n^1}(t^1) \dots b_{k^d}^{n^d}(t^d).$$



Man kann zeigen, dass die Tensorprodukt-B-Splines

$$b_k^n(t) := b_{k^1}^{n^1}(t^1) \cdots b_{k^d}^{n^d}(t^d), \quad k = (k^1, \dots, k^d) \in \mathbb{Z}^d,$$

eine Basis des Tensorprodukt-Splineräume  $\mathcal{S}_n^d(T)$  bilden.

Abbildung 1.2 zeigt einen bikubischen Tensorprodukt-B-Spline und die beiden univariaten Komponenten, aus denen er gebildet wird.

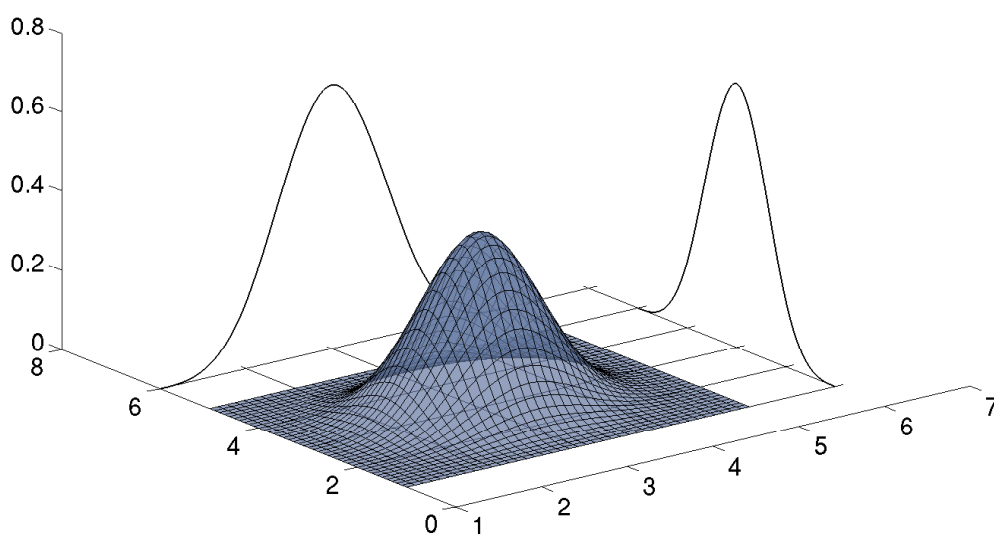


Abbildung 1.2.: Bikubischer Tensorprodukt-B-Spline bei uniformem Gitter

Die Konstruktion reduziert nicht nur die Auswertung von Splines auf den univariaten Fall, ebenso können auch die partiellen Ableitungen einfach durch entsprechendes Differenzieren der einzelnen Komponenten berechnet werden. Sei  $\alpha = (\alpha^1, \dots, \alpha^d)$  ein Multiindex, so kann die partielle Ableitung eines B-Splines berechnet werden als

$$\partial^\alpha b_k(t) := D^{\alpha^1} b_{k^1}^{n^1}(t^1) \cdots D^{\alpha^d} b_{k^d}^{n^d}(t^d).$$

Im Weiteren wird für partielle Ableitungen die verkürzte Schreibweise  $b_k^{(\alpha)}$  verwendet, um die Übersichtlichkeit zu erhöhen.

Betrachten wir nun ein offenes beschränktes Gebiet  $\Omega$  im  $\mathbb{R}^d$ . Der Splineräume sei auf in diesem Gebiet definierte Splines eingeschränkt. Das Innere des Trägers des B-Splines  $b_k$  ist durch

$$s_k := (\tau_{k^1}^1, \tau_{k^1+n^1}^1) \times \cdots \times (\tau_{k^d}^1, \tau_{k^d+n^d}^1)$$

gegeben. Die auf  $\Omega$  eingeschränkten Träger seien definiert durch

$$s_{\Omega,k} := s_k \cap \Omega.$$

Von Interesse sind nur Splines, welche auf  $\Omega$  definiert sind. Die Indexmenge der relevanten B-Splines ist

$$K_\Omega := \{k \in \mathbb{Z}^d : s_{\Omega,k} \neq \emptyset\}.$$

Damit ist ein endlich-dimensionaler Vektorraum definiert.

**Definition 1.1.3** Der auf  $\Omega$  eingeschränkte Tensorproduktraum der Ordnung  $n$  bezüglich des Knotenvektors  $T$  ist gegeben durch

$$\mathcal{B}_\Omega^n := \text{span}\{b_{k|\Omega} : k \in K_\Omega\}.$$

Im Allgemeinen können sich die Ordnungen in den Koordinatenrichtungen unterscheiden, wir schreiben  $n = (n^1, n^2, \dots, n^d)$ .

Außerdem spielen folgende Begriffe und Notationen in den Approximationsabschätzungen eine Rolle:

Das durch die Knotenfolge  $T$  gegebene Gitter besteht aus Gitterzellen  $\Gamma_k$ , diese werden durch Vektoren  $k \in \mathbb{Z}^d$  indiziert und sind als offene Boxen

$$\Gamma_k := (t_{k^1}^1, t_{k^1+1}^1) \times \dots \times (t_{k^d}^d, t_{k^d+1}^d)$$

gegeben. Analog zu den Trägern der B-Splines nennen wir

$$\Gamma_{\Omega,k} := \Gamma_k \cap \Omega$$

eingeschränkte Gitterzellen.

Die Seitenlängen von  $\Gamma_k$  seien als  $l_k^\iota := \tau_{k^\iota+1} - \tau_{k^\iota}$  definiert. Wir nehmen an, dass diese beschränkt sind:

**Definition 1.1.4** Die Gitterweite  $h$  eines durch die Knotenfolge  $T$  gegebenen Splinegitters ist

$$h := \max_{k \in \mathbb{Z}^d} \max_{\iota=1,\dots,d} l_k^\iota.$$

Die Verzerrung  $\varrho$  der Knotenfolge ist als maximaler Quotient

$$\varrho := h \left( \min_{k \in \mathbb{Z}^d} \min_{\iota=1,\dots,d} l_k^\iota \right)^{-1}$$

von Seitenlängen gegeben. Gilt  $\varrho = 1$ , so spricht man von einem uniformen Gitter.

### 1.1.4. Multivariate duale Funktionale

Eine multivariate Formulierung des de Boor-Fix Funktional ist gegeben durch:

**Definition 1.1.5** Sei  $T$  eine zulässige Knotenfolge. Für jedes  $k \in \mathbb{Z}^d$  und beliebiges  $\tau \in s_k$  sei durch

$$\lambda_k^* f := \frac{1}{(n-1)!} \sum_{\alpha < n} (-1)^{|n-1-\alpha|} \psi_k^{(n-1-\alpha)}(\tau) f^{(\alpha)}(\tau)$$

ein zu den B-Splines der Ordnung  $n$  duales multivariates de Boor-Fix Funktional definiert, wobei

$$\psi_k^n := \psi_{k^1}^{n^1}(x^1) \cdots \psi_{k^d}^{n^d}(x^d)$$

und  $(n-1)! := (n^1-1)! \cdots (n^d-1)!$  gelte.

Wie bereits angemerkt, sind diese Funktionale nur für Funktionen, die mindestens bis zur Ordnung  $(n^1-1, \dots, n^d-1)$  stetig differenzierbar sind, geeignet. Eine Möglichkeit, diese Einschränkung zu umgehen, ist es, die gegebene Funktion  $f$  zuerst durch ein Polynom zu approximieren, um dann die de Boor-Fix Funktionale  $\lambda_k^*$  anzuwenden.

Zur Konstruktion eines dualen Funktional zu einem relevanten B-Spline  $b_k$  wählen wir eine Gitterzelle  $\Gamma'_k \subset s_k$  mit nicht-leerem Schnitt mit  $\Omega$ . Auf dieser definieren wir einen  $d$ -dimensionalen Polynomraum  $\mathbb{P}_n$ , der aus Polynomen der Ordnung  $n \in \mathbb{N}_0^d$  besteht. Wir wählen eine Polynombasis

$$\{p_{k,\alpha} : \alpha < n\}$$

aus Tensorprodukten der univariaten Legendre-Polynome. Bei entsprechender Normierung sind diese orthonormal, das heißt

$$\int_{\Gamma'_k} p_{k,\alpha} p_{k,\beta} = \delta_{\alpha\beta}.$$

Nun ist die  $L^2$ -Approximation  $\tilde{f}$  einer integrierbaren Funktion  $f$  im Polynomraum  $\mathbb{P}_n$  durch

$$\tilde{f}|_{\Gamma'_k} = \sum_{\alpha < n} \left( \int_{\Gamma'_k} p_{k,\alpha} f \right) p_{k,\alpha}$$

gegeben. Das duale Funktional wird dann über das de Boor-Fix Funktional definiert:

**Definition 1.1.6** Sei  $f$  eine integrierbare Funktion und  $\tilde{f}$  ihre Approximation in  $\mathbb{P}_n$ , so ist durch

$$\lambda_k f := \lambda_k^* \tilde{f} = \lambda_k^* \sum_{\alpha < n} \left( \int_{\Gamma'_k} p_{k,\alpha} f \right) p_{k,\alpha} = \int_{\Gamma'_k} \underbrace{\left( \sum_{\alpha < n} (\lambda_k^* p_{k,\alpha}) p_{k,\alpha} \right)}_{:= q_k} f = \int_{\Gamma'_k} q_k f$$

ein Funktional  $\lambda_k : L^1(\Gamma'_k) \rightarrow \mathbb{R}$  gegeben.

Die Faktoren  $q_k$  sind Polynome. In der Tat gilt die Dualität:

**Lemma 1.1.7** *Die Funktionale  $\lambda_k$  sind dual zu den B-Splines  $b_i$ , das heißt*

$$\lambda_k b_i = \delta_{ki}.$$

*Darüber hinaus sind sie beschränkt, das heißt, es gibt eine Konstante  $c$ , so dass für alle  $f \in L^p(\Gamma'_k)$*

$$|\lambda_i f| \leq c(n, \varrho) h^{-d/p} \|f\|_{L^p(\Gamma'_k)} \quad (1.2)$$

*gilt.*

*Beweis:* Für jedes Polynom  $q \in \mathbb{P}_n$  entspricht  $q|_{\Gamma'_k}$  gerade seiner  $L^2$ -Projektion, daraus folgt  $\lambda_k q = \lambda_k^* q$ . Auf die innere Gitterzelle  $\Gamma'_k$  eingeschränkt gilt  $b_i|_{\Gamma'_k} \in \mathbb{P}_n$ , das heißt  $\lambda_k b_i = \lambda_k^* b_i = \delta_{ki}$ , somit bleibt die Dualität erhalten.

Ebenso wie die B-Splines ist die Ungleichung (1.2) invariant unter Skalierung der Knotenfolge. Deswegen können wir o.B.d.A. annehmen, dass  $h = 1$  gelte. Nach der Hölder-Ungleichung gilt

$$|\lambda_k f| \leq \|q_k\|_{L^{p'}(\Gamma'_k)} \|f\|_{L^p(\Gamma'_k)},$$

wobei  $p'$  der zu  $p$  konjugierte Hölder-Exponent sei. Nun ist  $q_k$  ein Polynom und somit auf  $\Gamma'_k$  beschränkt. Weiterhin hängt  $q_k$  stetig von einer endlichen Menge von Knoten ab. Die relevanten Knoten liegen in einer kompakten Menge von beschränkter Größe. Somit gilt  $\|q_k\|_{L^q(\Gamma'_k)} \leq c h^{-d/p}$ , wobei  $c$  nicht von  $h$ , wohl aber vom Verzerrungsfaktor  $\varrho$  und  $n$  abhängt.  $\square$

## 1.2. Gewichtete, erweiterte und gewichtete erweiterte B-Splines

Tensorprodukt-B-Splines sind sowohl für Approximationsalgorithmen als auch als Ansatzraum zur Lösung von Differentialgleichungen mittels der Finite-Elemente-Methode interessant. Man kann erwarten, bereits mit einer kleinen Anzahl von Freiheitsgraden eine hohe Genauigkeit zu erzielen. Zwei Probleme ergeben sich allerdings, sobald man beliebige Gebiete betrachtet: Erstens verliert der Raum erheblich an Approximationskraft, wenn man weitere Bedingungen an die Lösung stellt. Will man zum Beispiel eine Poisson-Gleichung mit Dirichlet-Nullrandbedingung lösen und die Randbedingung exakt einhalten, so sinkt die Approximationskraft. Das zweite Problem ist die mangelnde Stabilität des auf das Gebiet beschränkten Splineraumes. Der Grund dafür ist, dass es Splines geben kann, deren Träger nur zu einem sehr kleinen Teil im Inneren des betrachteten Gebiets liegen. Hier sollen diese beiden Probleme und die von Höllig, Reif und Wipper [35, 33, 32] dazu präsentierte Lösung erläutert werden, die sogenannten erweiterten und gewichteten erweiterten B-Splines.

### 1.2.1. Gewichtete Splines

Sowohl bei der Approximation einer Funktion als auch beim Lösen einer Differentialgleichung mit homogenen Randbedingungen kann es notwendig werden, den verwendeten diskreten Ansatzraum auf Funktionen zu beschränken, die gewisse Nullrandbedingungen erfüllen. Betrachten wir beispielsweise das Poisson-Problem

$$\begin{aligned} -\Delta u &= f \text{ in } \Omega \\ u &= 0 \text{ auf } \partial\Omega \end{aligned}$$

für ein glatt berandetes Gebiet  $\Omega$ .

Es gibt verschiedene Möglichkeiten, die Nullrandbedingung approximativ zu erfüllen. Die einfachste Idee ist, den Ansatzraum  $V$  auf Funktionen einzuschränken, welche die Randbedingung erfüllen, also am Rand verschwinden. Die schwache Formulierung des Poisson Problems führt dann über die Minimierung von

$$F(v) := \int_{\Omega} \sum_{i=1}^d \left( \frac{\partial v}{\partial x_i} \right)^2 dx - 2 \int_{\Omega} f v dx$$

zu einer in  $V$  optimalen Lösung.

Zwei weitere denkbare Ansätze ergeben sich aus Modifikationen des zu minimierenden Funktionals. Die Methode der Lagrange-Multiplikatoren [3, 4] führt einen weiteren Parameter ein, über den die Abweichung von der Randbedingung im Minimierungsschritt bestraft wird.

Bei der Penalty-Methode hingegen [2, 39] wird das Funktional

$$F_{\sigma}(v) := \int_{\Omega} \sum_{i=1}^d \left( \frac{\partial v}{\partial x_i} \right)^2 dx - 2 \int_{\Omega} f v dx + h^{-\sigma} \int_{\partial\Omega} v dx$$

minimiert. Der Parameter  $\sigma$  reguliert den Einfluss des Randes, wobei die Herausforderung darin liegt, diesen optimal zu wählen. Die Genauigkeit der Lösung sowie die Kondition des zu lösenden Systems sind von  $\sigma$  abhängig.

Kommen wir zurück zu der Idee die Ansatzfunktionen so auszuwählen, dass diese am Gebietsrand verschwinden. Dazu betrachten wir Tensorprodukt-B-Splines. Alle B-Splines, deren Träger teils außerhalb von  $\Omega$  liegen, sind am Rand von Null verschieden. Eine sehr naheliegende Möglichkeit ist, den Ansatzraum auf diejenigen Splines zu beschränken, deren Träger komplett im Inneren des Gebiets liegen. Die so entstehenden Funktionenräume haben allerdings eine sehr schlechte Approximationskraft am Rand. In Abbildung 1.3 ist der Bereich des Gebiets markiert, auf dem für das angedeutete Gitter und biquadratische B-Splines noch Funktionen im Ansatzraum enthalten wären, wenn man auf diese Weise die Nullrandbedingung erzwingt.

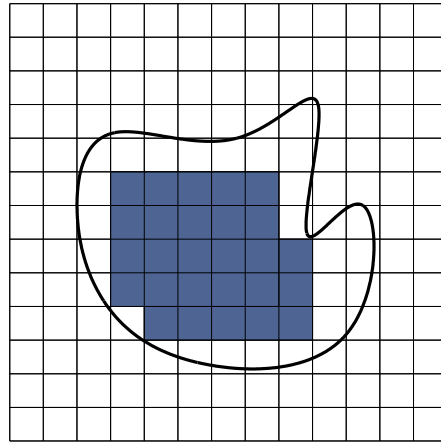


Abbildung 1.3.: Vereinigung der komplett im Inneren liegenden Träger

Eine bessere Lösung ist die Multiplikation aller im Ansatzraum enthaltenen Splines mit einer *Gewichtsfunktion*  $w : \Omega \mapsto \mathbb{R}$ , welche auf dem Rand  $\partial\Omega$  verschwindet und im Inneren positiv ist. Die Ansatzfunktionen sind dann von der Form  $wb_i$  mit  $b_i \in \mathcal{B}_\Omega^n$ . Bei ausreichender Glattheit der Gewichtsfunktion verändert sich dadurch die Approximationskraft der zugehörigen Splineräume nicht (siehe [32]). Dies führt zur Definition der gewichteten Splines:

**Definition 1.2.1** Sei  $\Omega \in \mathbb{R}^d$  ein Gebiet und  $\mathcal{B}_\Omega^n$  der zu gewichtende Spliner Raum. Eine Gewichtsfunktion  $w : \Omega \mapsto \mathbb{R}$  heißt zulässig, falls gilt

1.  $w \in C^n(\Omega)$
2.  $w$  ist äquivalent zur Abstandsfunktion  $d_\Omega := \text{dist}(x, \partial\Omega)$ , das heißt, es gibt Konstanten  $c_w, C_w > 0$ , so dass

$$c_w d_\Omega(x) \leq w(x) \leq C_w d_\Omega(x)$$

für  $x \in \Omega$  gilt.

Der zugehörige Funktionenraum

$${}^w\mathcal{B}_\Omega^n := \text{span}\{wb_k : b_k \in \mathcal{B}_\Omega^n\}$$

wird als gewichteter Spliner Raum bezeichnet.

Abbildung 1.4 zeigt links eine Gewichtsfunktion für das Beispielgebiet und rechts zwei der gewichteten biquadratischen B-Splines.

Es gibt mehrere bekannte Methoden, Gewichtsfunktionen zu konstruieren:

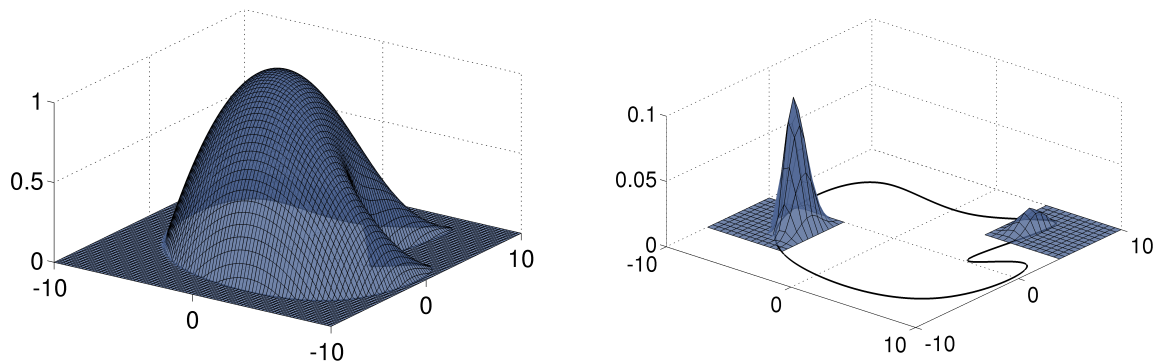


Abbildung 1.4.: Gewichtsfunktion und gewichtetes Splines

- Über die Abstandsfunktion:

Die Abstandsfunktion  $d_\Omega$  ist kein möglicher Ansatz. Die zweite Bedingung aus Definition 1.2.1 ist mit optimalen Konstanten  $c_w = 1, C_w = 1$  erfüllt. Allerdings ist die Abstandsfunktion selbst bei einfachen Gebieten wie dem Kreis nicht stetig differenzierbar. Allgemein sind die partiellen Ableitungen der Gewichtsfunktion an der medialen Achse nicht stetig – also an den Punkten des Gebiets, die keinen eindeutig bestimmten nächstliegenden Randpunkt besitzen. Für glatt berandete Gebiete berühren die medialen Achsen den Rand nicht. Das heißt man kann einen Streifen der Breite  $\delta > 0$  um den Rand finden, der keine solchen Punkte beinhaltet. Blendet man nun die Abstandsfunktion auf diesem Streifen glatt in die konstante Eins über, so erhält man eine zulässige Gewichtsfunktion der Form

$$w(x) := 1 - \max\left(0, 1 - \frac{d(x)}{\delta}\right).$$

Je kleiner  $\delta$  wird, desto mehr verliert das Verfahren an numerischer Stabilität.

- Bei algebraischen Randkurven:

Falls  $\Omega$  durch eine algebraische Kurve begrenzt ist, so existiert ein Polynom  $p$ , so dass

$$\partial\Omega = \{x \in \mathbb{R}^d \mid p(x) = 0\}.$$

Erfüllt dieses zusätzlich die Äquivalenz zur Abstandsfunktion am Rand, so ist  $p$  bereits eine zulässige Gewichtsfunktion.

- Mit Hilfe von R-Funktionen:

Rvachev et al. haben in mehreren Veröffentlichungen [48, 49] eine Methode vorgestellt, um für Gebiete, die aus Vereinigungen oder Schnitten oder Komplementen von Gebieten mit bekannter Gewichtsfunktion bestehen, Funktionen zu erstellen, die den geforderten Bedingungen genügen. Dies ermöglicht zum Beispiel die

Konstruktion komplexerer Gebiete aus Halbräumen, Ellipsoiden und Würfeln und ähnlichen Gebieten.

- Transfinite-Mittelwert-Interpolation:  
Kürzlich haben Dyken und Floater die Methode der Transfiniten-Mittelwert-Interpolation [22] im Kontext der Gewichtsfunktionskonstruktion angeführt. Diese ist sowohl auf konvexe als auch nicht-konvexe glatt berandete Gebiete anwendbar und ermöglicht die Interpolation von Funktionen, die am Rand gegeben sind. Ein Nachteil ist jedoch die numerische Instabilität des Algorithmus bei der Auswertung der fast singulären Integrale am Rand sowie die numerische Komplexität der Berechnungen.

In Kapitel 4 wird eine neue Methode vorgestellt, um eine Gewichtsfunktion von gewünschter Glattheit zu konstruieren, die schnell auswertbar ist.

### 1.2.2. Erweiterte Splines

Ein weiterer Schwachpunkt der Tensorprodukt-B-Splines liegt in der mangelnden Stabilität bei beliebig berandeten Gebieten. Während auf Rechtecken bzw. Boxen die Stabilität der univariaten B-Splines durch geeignete Knotenwahl auf die Tensorprodukt-B-Splines übertragen werden kann, indem man darauf achtet, dass in jeder Dimension die Ecken der Intervalle Bestandteil der Knotenfolge sind, ist dies im Allgemeinen nicht möglich. Es entstehen auch bei geschickter Positionierung des Gitters immer wieder relevante B-Splines  $b_k$ , für die das Volumen von  $s_{\Omega,k}$  klein ist in Vergleich zu dem des gesamten Trägers  $s_k$ . Diese erzeugen sowohl wenn man die Splines als Ansatzraum für eine Finite-Elemente-Methode benutzt als auch bei Approximationen Instabilitäten, die nicht nur von numerischer Natur sind.

Betrachten wir die Approximation gestreuter Daten, wie sie in Kapitel 3 eingehend bearbeitet wird:

Gegeben sind Datenpunkte auf einem glatt berandeten Gebiet und dazugehörige Funktionswerte, die approximiert werden sollen. Gewünscht ist dabei eine Approximation, die auf dem gesamten Gebiet möglichst kleine Abweichungen von der abgetasteten Funktion aufweist. Ein denkbare Verfahren ist, die *Methode der kleinsten Fehlerquadrate* anzuwenden, diese wird im Folgenden als LSF (*least squares fit*) abgekürzt. Betrachten wir erneut das Beispiel aus der Einleitung. In Abbildung 1.5 ist links das Gebiet samt der Positionen der Datenpunkte und dem Splinegitter zu sehen. Die rechte Abbildung zeigt die glatte Funktion  $f(x,y) = 2\sin(x) + y^3$ , welche an den Punkten abgetastet wurde und approximiert werden soll. Entgegen der Erwartung liefert der LSF trotz der Dichte der Daten und der Glattheit der Funktion nicht notwendigerweise ein zufriedenstellendes Ergebnis. Abbildung 1.6 zeigt das Resultat, welches mit biquadratischen B-Splines und Gitterweite 0.4 bei der obigen Konfiguration erreicht wurde. Am Rand sind deutliche Artefakte zu erkennen. Dass die Wahl des Gitters das



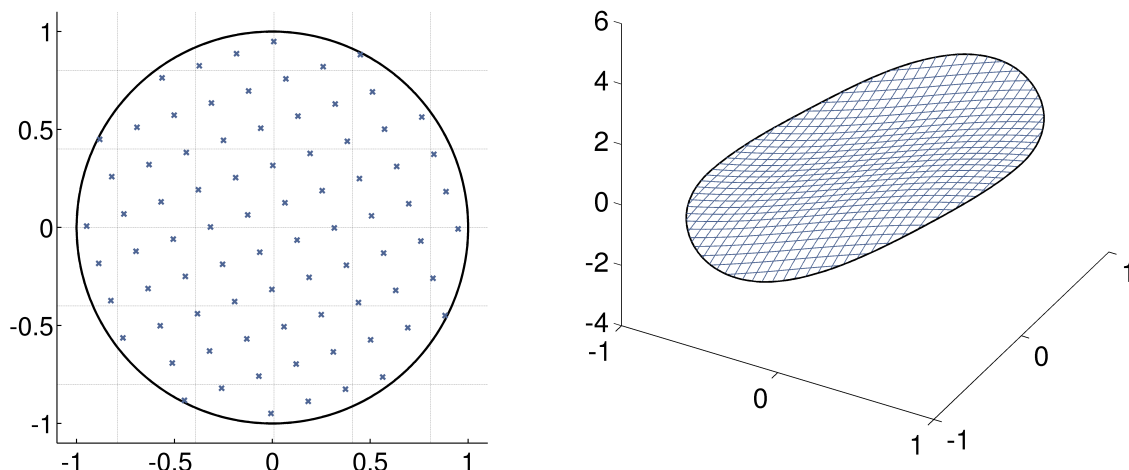


Abbildung 1.5.: Approximation gestreuter Daten auf Gebiet

Ergebnis beeinflusst, illustriert der rechte Teil der Abbildung. Das Splinegitter wurde kontinuierlich in eine Koordinatenrichtung verschoben und die entsprechenden LSF-Ergebnisse berechnet. Abgetragen wurde der  $L^\infty$ -Fehler der Approximation auf dem Gebiet über der Gitterverschiebung. Wie man sieht, oszilliert er stark. Fehler dieser Art treten wie im Beispiel stets am Rand auf, man nennt sie *Formartefakte*. Ursache dafür sind B-Splines, deren Träger nur zu einem geringen Teil im Gebiet liegen. Liegt ein Datenpunkt als einziger im Träger eines B-Splines, so wird dieser interpoliert. Dies kann jedoch dazu führen, dass im Rest des Trägers der Fehler groß wird. Es handelt sich also um mehr als eine numerische Instabilität.

Diese Beobachtung, die ebenso auf kontinuierliche  $L^2$ -Approximation übertragbar ist, führt zu folgender Charakterisierung:

**Definition 1.2.2** Sei  $T = (T^i)_{i=1}^d$  das Gitter des Splineraumes.

1. Eine relevante Gitterzelle  $\Gamma_k$  mit  $k \in \mathbb{Z}^d$  heißt innere Zelle, falls  $\Gamma_k = \Gamma_{\Omega,k}$  gilt. Die verbleibenden Gitterzellen heißen Randzellen, falls  $\Gamma_{\Omega,k} \neq \emptyset$  gilt.
2. Ein Tensorprodukt-B-Spline  $b_k$  mit  $k \in \mathbb{Z}^d$  heißt innerer B-Spline, falls sein Träger mindestens eine innere Zelle enthält. Die Menge der Indizes aller inneren B-Splines werde mit  $I_\Omega$  bezeichnet. Ein Spline heißt äußerer B-Spline, falls sein Träger zwar eine Randzelle, jedoch keine innere Zelle enthält. Die Menge der Indizes aller äußeren Splines werde mit  $J_\Omega$  bezeichnet.

Abbildung 1.7 zeigt innere Zellen (hell) und Randzellen (dunkel) für ein Gebiet im  $\mathbb{R}^2$ , sowie exemplarisch die Träger zweier äußerer (dunkel) und zweier innerer biqua-

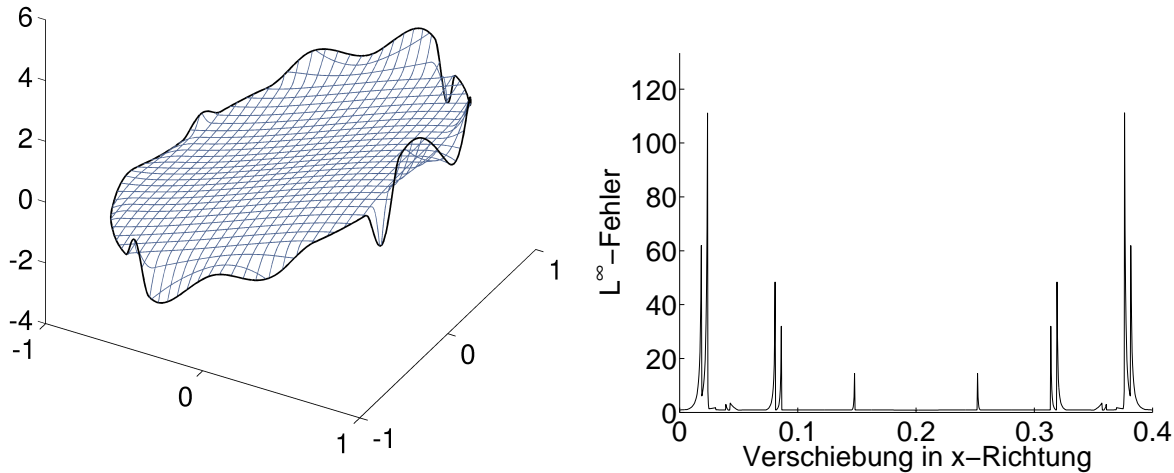


Abbildung 1.6.: LSF-Resultate mit Standard-B-Splines

dratischen B-Splines (hell) auf demselben Gitter. Nach der obigen Definition sind es die äußeren B-Splines, die die Stabilitätsprobleme verursachen. Wie schon zuvor ist es keine geeignete Idee, diese einfach aus dem Funktionenraum zu entfernen, denn dieser würde dadurch erheblich an Approximationskraft verlieren.

Eine mögliche Lösung des Problems besteht darin, die „instabilen“ äußeren B-Splines an die „stabilen“ inneren B-Splines anzukoppeln. Die neuen Basisfunktionen haben dann die Form

$$B_i := b_i(t) + \sum_{j \in J} e_{ij} b_j(t), \quad i \in I_\Omega, \quad e_{ij} \in \mathbb{R}.$$

Solch eine Funktion  $B_i$  besteht also aus einem inneren B-Spline und einer Reihe von angekoppelten äußeren B-Splines. Dadurch bekommt man einen größeren Träger, was den Begriff der *Erweiterung* erklärt. Bei der Konstruktion der Erweiterungskoeffizienten ist zu beachten, dass die Lokalität der Basis gewährleistet bleibt und es weiterhin möglich ist, im erweiterten Splineraum Polynome zu reproduzieren. Dies führt zu folgenden Ankopplungsregel:

**Definition 1.2.3** Sei  $b_j$  ein äußerer B-Spline. Wir suchen zunächst eine zu  $b_j$  nächstgelegene Gitterzelle  $G := \Gamma_{k(j)}$ . Sei nun  $I(j)$  die Menge aller Indizes von B-Splines, deren Träger  $G$  enthält. Weiterhin sei für  $i \in I(j)$  das Polynom  $p_i$  dasjenige, welches auf  $G$  mit  $b_i$  übereinstimmt. Wir setzen

$$e_{i,j} := \lambda_j^* p_i,$$

wobei  $\lambda_j^*$  das in Definition 1.1.5 gegebene, zu  $b_i$  duale de Boor-Fix-Funktional ist.

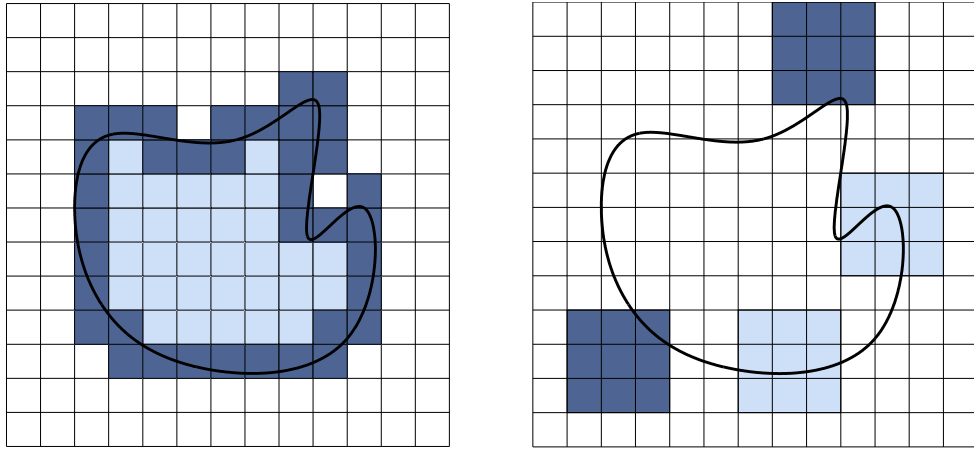


Abbildung 1.7.: Innere und äußere Zellen und Splines

Betrachtet man umgekehrt einen inneren B-Spline  $b_i$  und die Menge aller Indizes der an ihn gekoppelten äußeren B-Splines  $J(i)$ , so ergibt sich:

**Definition 1.2.4** Für einen inneren B-Spline  $b_i$  ist der zugehörige erweiterte B-Spline gegeben durch

$$B_i := b_i + \sum_{j \in J(i)} e_{ij} b_j,$$

wobei die Erweiterungskoeffizienten nach obiger Konstruktion zu bilden sind. Im Folgenden bezeichnen wir diese Splines auch als eb-Splines. Den zugehörigen Splineraum

$$\mathcal{B}_\Omega^n := \text{span}\{B_i : i \in I_\Omega\} \subset \mathcal{B}_\Omega^n$$

nennt man erweiterten Splineraum. Er enthält die Polynome von Ordnung  $n$ , das heißt

$$\mathbb{P}_n \subset \mathcal{B}_\Omega^n.$$

Das Innere des Trägers des erweiterten Splines  $B_i$  bezeichnen wir mit  $S_k$ , es gilt

$$s_k \subset S_k.$$

Weiterhin bezeichne

$$S_{\Omega,k} := S_k \cap \Omega$$

den auf das Gebiet  $\Omega$  eingeschränkten Träger.

Abbildung 1.8 zeigt links exemplarisch den Träger eines inneren B-Splines  $b_i$  (hell) und der an ihn angekoppelten äußeren B-Splines (dunkel). Die Pfeile verbinden die Zentren der äußeren B-Splines mit der nächstgelegenen inneren Zelle, an die angekoppelt wird.

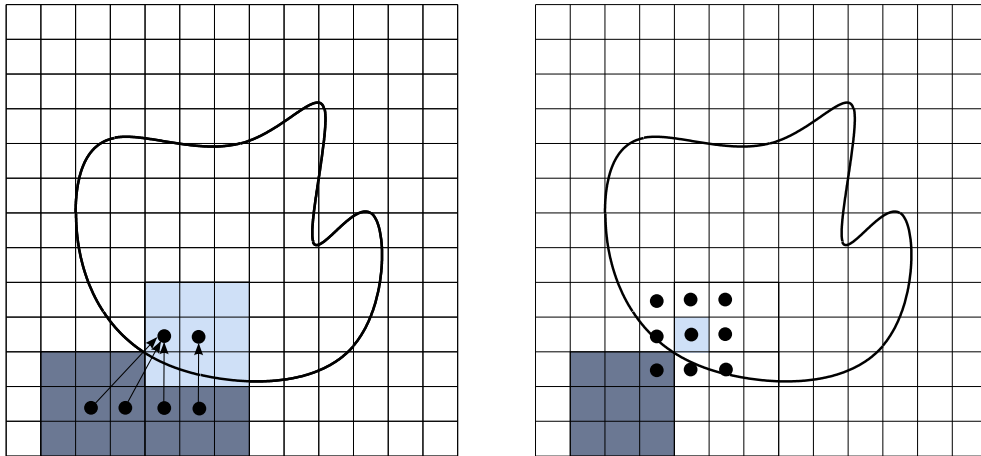


Abbildung 1.8.: Träger eines erweiterten B-Splines

Der gesamte markierte Bereich entspricht dem Träger des erweiterten B-Splines. Die rechte Abbildung zeigt den Träger eines äußeren B-Spline (dunkel), die nächstgelegene innere Zelle (hell) und die Zentren der  $n \times n$  inneren B-Splines, an die der markierte B-Spline angekoppelt wird.

Die Berechnung der Erweiterungskoeffizienten kann im Falle von uniformen Gittern stark vereinfacht werden. Sie ergeben sich in diesem Fall durch Auswertung der Lagrange-Polynome zum Indexgitter, siehe [35]. Die oben angegebene Möglichkeit ist jedoch auch für nichtuniforme Gitter geeignet.

Kehren wir zum Ausgangsbeispiel, der Approximation gestreuter Daten, zurück. Wir verwenden nun erweiterte B-Splines auf dem gleichen Gitter, um das Problem zu lösen. Die so berechneten Resultate sind deutlich glatter. Der rechte Teil von Abbildung 1.9 zeigt erneut den  $L^\infty$ -Fehler auf dem Gebiet, aufgetragen über der Verschiebung des Gitters in  $x$ -Richtung. Er liegt im Rahmen des bei der gegebenen Gitterweite zu Erwartenden. Wie der linke Teil illustriert, treten am Rand – unabhängig von der Verschiebung des Gitters – keine Form-Artefakte mehr auf.

### 1.2.3. Gewichtete erweiterte Splines

Die Kombination beider präsentierten Ideen führt nun zur Definition der *gewichteten erweiterten B-Splines*, kurz *web-Splines*. Dies steht für die englische Bezeichnung *weighted extended B-Splines*.

**Definition 1.2.5** Seien  $I_\Omega, J(i), e_{i,j}$  wie zuvor und sei  $w$  eine zulässige Gewichtsfunk-

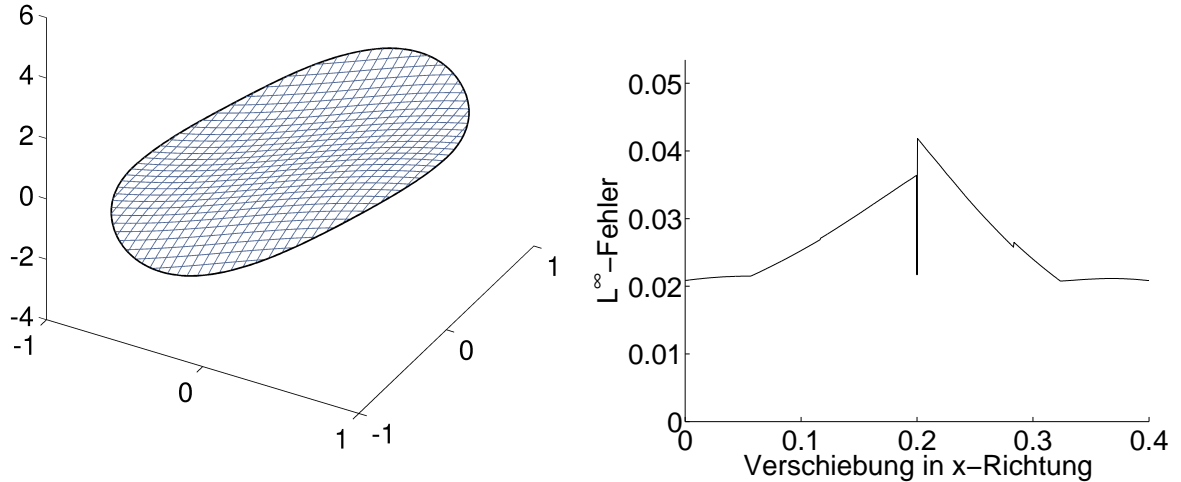


Abbildung 1.9.: LSF-Resultate mit erweiterten B-Splines

tion. Für  $i \in I_\Omega$  ist der gewichtete erweiterte B-Spline definiert als

$${}^w B_i := \frac{w}{w(x_i)} \left( b_i + \sum_{j \in J(i)} e_{ij} b_j \right),$$

wobei  $x_i$  das Zentrum einer im Träger von  $b_i$  enthaltenen inneren Zelle sei. Diese B-Splines bilden eine Basis des gewichteten erweiterten Splineräume

$${}^w \mathcal{B}_\Omega^n := \text{span}\{{}^w B_i : i \in I_\Omega\}.$$

In den nächsten Abschnitten werden die wichtigsten Eigenschaften der eingeführten Splineräume aufgelistet, wobei an einigen Stellen zwischen eb-Splines und web-Splines differenziert werden muss.

#### 1.2.4. Stabilität der erweiterten Splineräume

Das wesentliche Ziel der Erweiterungskonstruktion ist die Stabilität der entstehenden Basis, diese ist beiden Splineräumen gemein. Um die Stabilität zu beweisen, ist es wichtig zu beobachten, wie die Ankopplung sich auf die Träger der erweiterten Splines  $B_k$  auswirkt.

**Lemma 1.2.6** Es sei

$$\sigma_\Omega := \max_{i \in I_\Omega} \frac{\text{diam}(S_{\Omega,i})}{h}$$

ein Maß für die Trägergröße. Ist  $\Omega$  ein Lipschitz Gebiet, so ist  $\sigma_\Omega$  beschränkt,

$$\sigma_\Omega \leq c(n, d, \varrho, \Omega). \quad (1.3)$$

Weiterhin sind auch die Erweiterungskoeffizienten beschränkt,

$$\sum_{j \in J_\Omega} |e_{i,j}| \leq c(n, d, \varrho, \Omega), \quad i \in I_\Omega. \quad (1.4)$$

Beide Konstanten hängen von  $n, d, \varrho$  und der Lipschitz-Konstante von  $\Omega$ , jedoch nicht von  $h$  ab.

Ein Beweis hierzu findet sich in [33, Th. 6], wobei zu beachten ist, dass für die Träger der B-Splines  $\text{diam}(s_k) \leq c(n, d) h$  gilt.

Trotzdem ist es wichtig, dass eine dem Gebiet angepasste Auflösung des Gitters gewählt wird, Abbildung 1.10 zeigt einen möglichen Problemfall. Hier ist der Abstand vom äußeren anzukoppelnden B-Spline zur nächsten inneren Zelle groß, was auch zu großen Ankopplungskoeffizienten führt. Dieses Verhalten kann man immer dann beobachten, wenn Details feiner sind als die Gitterweite. Dies schlägt sich auch in der Lipschitz-Konstante des Gebiets nieder und somit in Abschätzung (1.4).

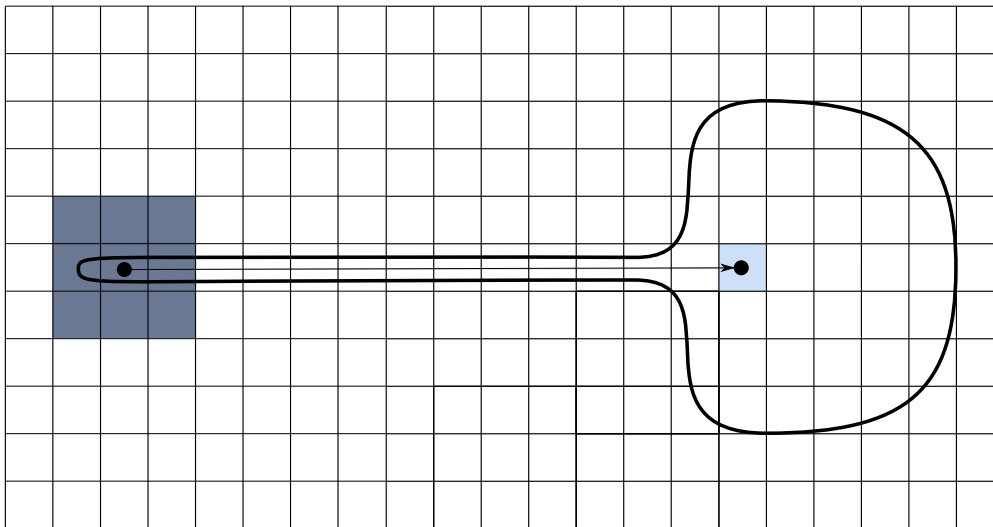


Abbildung 1.10.: Nicht an Gebiet angepasste Auflösung

Kommen wir nun zur Stabilität, dem größten Vorzug der hier vorgestellten Splineräume über die Standard-Tensorprodukt-B-Splines. Auch hier sei für den Beweis wieder auf [33, Th. 9] verwiesen.

**Lemma 1.2.7** Sowohl web-Splines als auch eb-Splines sind bezüglich der  $p$ -Normen für  $1 \leq p \leq \infty$  stabil, das heißt es existieren Konstanten  $c_1, c_2$  so dass

$$c_1^{-1}(n, d, \varrho, \sigma_\Omega) h^{d/p} \|a\|_p \leq \left\| \sum_{i \in I_\Omega} a_i B_{\Omega,i} \right\|_{L^p(\Omega)} \leq c_2(n, d, \varrho, \sigma_\Omega) h^{d/p} \|a\|_p, \quad (1.5)$$

wobei  $a = (a_i)_{i \in I_\Omega}$  der Koeffizientenvektor ist. Für  $p = \infty$  ist  $d/p$  als 0 zu interpretieren. Die Konstanten sind von  $n, d, \varrho$  und  $\sigma_\Omega$  abhängig.

Zum Beweis der ersten Ungleichung ist (1.2) ausreichend, wenn man beachtet, dass jeder Punkt  $x \in \Omega$  nur in endlich vielen Trägern liegt.

Damit in engem Zusammenhang steht die folgende *inverse Abschätzung*, die Schranken für die Ableitungen der Splines angibt:

**Lemma 1.2.8** Für jeden Multiindex  $\alpha \in \mathbb{N}^d$  mit  $|\alpha| \leq n$  ist die inverse Abschätzung der Form

$$\begin{aligned} \left\| \sum_{i \in I_\Omega} a_i B_{\Omega,i}^{(\alpha)} \right\|_{L^p(\Omega)} &\leq c_3(n, d, \varrho, \sigma_\Omega) h^{d/p-|\alpha|} \|a\|_p \\ &\leq c_4(n, d, \varrho, \sigma_\Omega) h^{-|\alpha|} \left\| \sum_{i \in I_\Omega} a_i B_{\Omega,i} \right\|_{L^p(\Omega)} \end{aligned} \quad (1.6)$$

erfüllt. Des Weiteren gilt für innere Zellen  $\Gamma'$

$$\left\| \sum_{i \in I_{\Gamma'}} a_i B_{\Omega,i}^{(\alpha)} \right\|_{L^p(\Gamma')} \leq c_4(n, d, \varrho, \sigma_\Omega) h^{-|\alpha|} \left\| \sum_{i \in I_{\Gamma'}} a_i B_{\Omega,i} \right\|_{L^p(\Gamma')}, \quad (1.7)$$

wobei  $I_{\Gamma'} := \{i \in I_\Omega : \Gamma' \cap S_{\Omega,i} \neq \emptyset\}$  ist.

Auch hier ist die Abhängigkeit der Konstanten von  $n, d, \varrho$  und von  $\sigma_\Omega$  zu beachten.

*Beweis:* Der Lesbarkeit halber sei  $c$  eine generische Konstante, die ihren Wert in jeder Abschätzung ändern kann. Diese sei von  $n, d, \varrho$  und  $\sigma_\Omega$  abhängig, niemals jedoch von  $h$ .

Der zweite Teil der Abschätzung folgt direkt aus (1.5). Bleibt der erste Teil zu beweisen. Für  $p < \infty$  gilt die folgende Ungleichung, wobei die  $L^p$ -Norm über  $\Omega$  durch die Normen auf den einzelnen Gitterzellen  $\Gamma_{\Omega,l}$  abgeschätzt wird:

$$\left\| \sum_{i \in I_\Omega} a_i B_{\Omega,i}^{(\alpha)} \right\|_{L^p(\Omega)}^p \leq \sum_{l \in \mathbb{Z}^d} \left\| \sum_{i \in I_\Omega} a_i B_{\Omega,i}^{(\alpha)} \right\|_{L^p(\Gamma_{\Omega,l})}^p. \quad (1.8)$$

Betrachtet man eine einzelne Gitterzelle  $\Gamma_{\Omega,l}, l \in \mathbb{Z}^d$ , so ist nur eine beschränkte Anzahl von Splines darauf definiert. Wir definieren ihre Indexmenge als

$$I_l := \{i \in I_\Omega : \Gamma_{\Omega,l} \cap S_{\Omega,i} \neq \emptyset\}$$

und beobachten, dass  $\#I_l = n^d$  gilt. Hier und im Folgenden gibt  $\#$  die Anzahl der Elemente einer Menge an. Auch umgekehrt gibt es für jeden Spline nur eine beschränkte Anzahl von relevanten Gitterzellen. Deren Indexmenge sei durch

$$K_i := \{l \in K_\Omega : \Gamma_{\Omega,l} \cap S_{\Omega,i} \neq \emptyset\}$$

gegeben. Hier gilt wegen der Definition von  $\sigma_\Omega$  und der Beschränktheit der Seitenlängen der Gitterzellen durch  $h/\varrho$  die Abschätzung  $\#K_i \leq (\varrho\sigma_\Omega)^d$ .

Weiterhin sind die Basisfunktionen und ihre Ableitungen beschränkt. Es gilt

$$\|B_{\Omega,i}^{(\alpha)}\|_{L^\infty(\Omega)} \leq ch^{-|\alpha|}, \quad \alpha \leq n,$$

und somit

$$\left\| \sum_{i \in I_l} a_i B_{\Omega,i}^{(\alpha)} \right\|_{L^p(\Gamma_{\Omega,l})}^p \leq ch^{-|\alpha|p} \text{vol}(\Gamma_{\Omega,l})^{-1} \sum_{i \in I_l} |a_i|^p \leq ch^{d-|\alpha|p} \sum_{i \in I_l} |a_i|^p.$$

Einsetzen in (1.8) ergibt

$$\begin{aligned} \left\| \sum_{i \in I_\Omega} a_i B_{\Omega,i}^{(\alpha)} \right\|_{L^p(\Omega)}^p &\leq \sum_{l \in \mathbb{Z}^d} \left\| \sum_{i \in I_l} a_i B_{\Omega,i}^{(\alpha)} \right\|_{L^p(\Gamma_{\Omega,l})}^p \\ &\leq \sum_{l \in \mathbb{Z}^d} (ch^{d/p-|\alpha|})^p \sum_{i \in I_l} |a_i|^p = (ch^{d/p-|\alpha|})^p \sum_{l \in \mathbb{Z}^d} \sum_{i \in I_l} |a_i|^p \\ &= (ch^{d/p-|\alpha|})^p \sum_{i \in I_\Omega} \sum_{l \in K_i} |a_i|^p = (ch^{d/p-|\alpha|})^p \sum_{i \in I_\Omega} \#K_i |a_i|^p \\ &\leq (ch^{d/p-|\alpha|})^p \|a\|_p^p, \end{aligned}$$

womit (1.6) gezeigt ist. Analog gilt

$$\left\| \sum_{i \in I_{\Gamma'}} a_i B_{\Omega,i}^{(\alpha)} \right\|_{L^p(\Gamma')} \leq ch^{d/p-|\alpha|} \sum_{i \in I_{\Gamma'}} |a_i|$$

Daraus folgt mit [33, Thm.7] die lokale Ungleichung (1.7). □

Die beiden letzten Resultate sind von großer Bedeutung. Sie bilden die Grundlagen für die in Kapitel 3 vorgestellten Abschätzungen und erklären, warum eb- und web-Splines immer dann interessant sind, wenn auf Gebieten mit beliebigem Rand gearbeitet wird.



### 1.2.5. Quasiinterpolation und Approximationskraft

Die Erweiterung ändert die Approximationsgüte der Splines nicht, dies gilt es zu beweisen. Ein dazu verwendetes Werkzeug sind die dualen Funktionale und aus ihnen konstruierten Quasiinterpolanten. Hier wird an einigen Stellen zwischen eb- und web-Splines zu unterscheiden sein. Betrachten wir zuerst den erweiterten Spliner Raum  ${}^e\mathcal{B}_\Omega^n$ , hier gilt:

**Lemma 1.2.9** *Die in Definition 1.1.6 angegebenen Funktionale sind zu den erweiterten B-Splines dual, das heißt*

$$\lambda_k B_i = \delta_{ki}, \quad k, i \in I_\Omega.$$

Dies wird einsichtig, wenn man sich bewusst macht, dass ein erweiterter B-Spline nur die Linearkombination aus einem inneren und mehreren äußeren B-Splines ist. Eine kleine Modifikation liefert duale Funktionale zu den erweiterten gewichteten B-Splines  ${}^w B_k$ :

**Definition 1.2.10** *Durch*

$$\Lambda_k f := w(x_k) \lambda_k \left( \frac{f}{w} \right)$$

*wird unter den Voraussetzungen aus Definition 1.2.5 ein zum web-Spline  $B_k$  duales Funktional definiert.*

Somit können wir in beiden Fällen Quasiinterpolanten [17] definieren. Ein *Quasiinterpolant der Ordnung  $n$*  ist eine lineare Abbildung, welche Polynome reproduziert und von einem Funktionenraum in einen Spliner Raum der Ordnung  $n$  abbildet.

**Definition 1.2.11** *Unter obigen Voraussetzungen an Splineräume und Gewichtsfunktion seien die Quasiinterpolanten*

1.  ${}^e Q : L^1(\Omega) \rightarrow {}^e\mathcal{B}_\Omega^n$  mit

$${}^e Q f := \sum_{i \in I_\Omega} \lambda_i f B_i$$

und

2.  ${}^w Q : {}^w L^1(\Omega) \rightarrow {}^w\mathcal{B}_\Omega^n$  mit

$${}^w Q f := \sum_{i \in I_\Omega} \Lambda_i f B_i$$

*definiert. Wobei  ${}^w L^1(\Omega) := \{f : f/w \in L^1(\Omega)\}$  die Menge aller Funktionen sei, für die der Koeffizient  $f/w$  integrierbar ist.*

Eine wichtige Eigenschaft des Quasiinterpolanten des erweiterten Spliner Raumes ist:

**Lemma 1.2.12** *Das in Definition 1.2.11 eingeführte Funktional reproduziert Polynome, das heißt für jedes  $q \in \mathbb{P}_n$  gilt*

$${}^e\mathbb{Q} q = q.$$

*Beweis:* Auch dieser Beweis ist elementar, da für alle Polynome  $q \in \mathbb{P}_n$  auch  $q \in \mathcal{B}_\Omega^n$  gilt. Das heißt es gibt Koeffizienten, so dass  $q = \sum_{i \in I_\Omega} a_i B_i$ . Nun folgt durch Einsetzen in Definition 1.2.11

$${}^e\mathbb{Q} q = \sum_{k \in I_\Omega} \lambda_k \left( \sum_{i \in I_\Omega} a_i B_i \right) B_k = \sum_{k \in I_\Omega} a_k B_k = q.$$

□

Im gewichteten erweiterten Splineraum ist dies nicht der Fall. Es sind nur gewichtete, das heißt mit der Gewichtsfunktion multiplizierte, Polynome in  ${}^w\mathcal{B}_\Omega^n$  enthalten. Diese können über den Quasiinterpolanten  ${}^w\mathbb{Q}$  reproduziert werden.

**Lemma 1.2.13** *Das in 1.2.11 definierte Funktional reproduziert gewichtete Polynome, das heißt für jedes  $q_w \in {}^w\mathbb{P}_n$  gilt*

$${}^w\mathbb{Q} q_w = q_w.$$

Von größerer Bedeutung ist jedoch die Frage, wie gut beliebige genügend glatte Funktionen in den Splineräumen approximiert werden können:

**Satz 1.2.14** *Sei  $\Omega$  ein Gebiet mit glattem Rand und  $\mathcal{B}_\Omega^n$  der zugehörige erweiterte Splineraum zur Gitterweite  $h$ . Sei weiterhin  $f \in W_p^n(\Omega)$ , so gilt für den Approximationsfehler des Quasiinterpolanten  ${}^e\mathbb{Q}$*

$$|f - {}^e\mathbb{Q} f|_{W_p^m(\Omega)} \leq c_5(n, d, \varrho, \Omega) h^{n-m} |f|_{W_p^n(\Omega)}, \quad m \leq n. \quad (1.9)$$

*Sei weiterhin  $w \in C^l(\overline{\Omega})$  eine zulässige Gewichtsfunktion und gelte  $f = wg, g \in W_p^n(\Omega)$ , so gilt im erweiterten gewichteten Splineraum  ${}^w\mathcal{B}_\Omega^n$*

$$|f - {}^w\mathbb{Q} f|_{W_p^m(\Omega)} \leq c_6(n, d, \varrho, \Omega) h^{n-m} |f|_{W_p^n(\Omega)}, \quad m \leq \min\{n, l\}. \quad (1.10)$$

*Die Konstanten hängen von  $n, d, \varrho$  und den Lipschitz-Konstante von  $\Omega$  ab.*

Untersucht man die Abhängigkeit von den zu approximierenden Funktionen, so stellt sich heraus, dass es sich um die Abhängigkeit von den Sobolev-Seminormen der Funktionen handelt. Detaillierte Beweise hierzu findet sich in [45, 32], wobei bei (1.10) erschwerend dazu kommt, dass die Regularität des Quotienten  $f/w$  betrachtet werden muss.

Diese Abschätzung gibt unter anderem an, wie gut Algorithmen zur Approximation gestreuter Daten mit erweiterten Splines höchstens sein können. In Kapitel 3 wird bewiesen, dass es unter bestimmten Annahmen über die zu approximierenden Daten möglich ist, im Sinne von Lemma 1.2.14 optimale Approximationen zu konstruieren.

## 2. Approximation mit Zwei-Schritt-Methoden

Wie gut kann eine gegebene Funktion in einem bestimmten Funktionenraum auf einem Gebiet approximiert werden? Mit welchen Algorithmen erreicht man diese optimale Approximation und wie kann die Optimalität bewiesen werden? Dies sind bedeutende Fragen der Approximationstheorie.

Die erste Frage ist im Falle der erweiterten B-Splines durch Satz 1.2.14 beantwortet. Für den Approximationsfehler  $\Delta$  gilt

$$\|\Delta\|_{L_p(\Omega)} \leq c h^n.$$

Es bleibt die Frage danach, wie im obigen Sinne optimale Approximationsalgorithmen mit erweiterten B-Splines konstruiert werden können.

In [15] werden Zwei-Schritt-Methoden mit erweiterten B-Splines vorgestellt und untersucht. Die Resultate dieser Veröffentlichung werden in Teilen dieses und des folgenden Kapitels vorgestellt und verallgemeinert.

*Zwei-Schritt-Methoden* wurden bereits von Schumaker [51] vorgeschlagen und sind dem Namen entsprechend einfach strukturiert: In einem ersten Schritt wird das Approximationsgebiet  $\Omega$  in mehrere nicht notwendigerweise disjunkte Teilgebiete  $\Omega_i \subset \Omega$  unterteilt. Auf diesen Gebieten wird eine Approximation durchgeführt. In einem zweiten Schritt werden die lokalen Approximationen in eine globale transformiert.

Die Vorteile dieses Vorgehens liegen zum einen in der geringeren Größe der lokalen Gebiete, die sich in der geringeren Größe der zu lösenden Gleichungssysteme widerspiegelt. Zum anderen erlaubt die Zweiteilung eine größere Flexibilität in der Wahl der Approximationsalgorithmen. Hat man es zum Beispiel im Falle der Approximation gestreuter Daten mit einer auf dem Gebiet variierenden Datendichte zu tun (siehe Abbildung 2.1), so ist es möglich, verschiedene Algorithmen auf den einzelnen Approximationsgebieten zu verwenden. Auch bezüglich des Funktionenraumes besteht eine größere Freiheit als bei einstufigen Approximationen. Die lokalen Approximationen müssen nicht notwendigerweise im gleichen Raum liegen wie die endgültige globale Approximation.

In diesem Kapitel wird gezeigt, dass es möglich ist, im obigen Sinne optimale globale Approximationen in  $\mathcal{B}_\Omega^n$  zu konstruieren. Dazu werden hinreichende Bedingungen an die Approximationsschemata formuliert. Die kontinuierliche  $L^2$ -Approximation wird als erstes Beispiel eines Zwei-Schritt-Algorithmus betrachtet. Im letzten Abschnitt wird

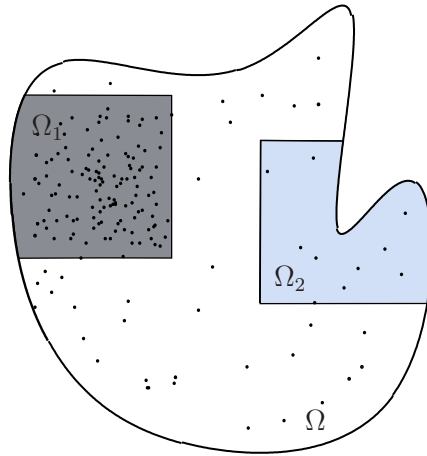


Abbildung 2.1.: Lokale Gebiete unterschiedlicher Datendichte

eine Fehlerschranke für globale Approximationsschemata hergeleitet. Erneut dient die kontinuierliche  $L^2$ -Approximation als erstes Beispiel.

### 2.1. Grundlagen

Um Abschätzungen für den Approximationsfehler zu erhalten, müssen Bedingungen an die lokalen Approximationen, das Gesamtgebiet und die lokalen Gebiete sowie die zu approximierende Funktion  $f$  gestellt werden.

Die Funktionen müssen eine gewisse Glattheit aufweisen. Im Folgenden sei angenommen, dass  $f$  im Sobolev-Raum  $W_p^\nu(\Omega)$  liegt (siehe Anhang), wobei  $\nu$  kleiner oder gleich der Ordnung  $n$  des Splineraumes ist. Anforderungen an das Approximationsschema und die betrachteten Gebiete werden in den nächsten Abschnitten im Detail betrachtet.

#### 2.1.1. Zwei-Schritt-Methoden mit erweiterten B-Splines

Im Gegensatz zu den in Kapitel 1 eingeführten Splinerräumen mit gemischten Ordnungen werden im Folgenden nur isotrope Splinerräume betrachten, das heißt, die Ordnung in alle Koordinatenrichtungen ist gleich  $n$ . Wie bisher schreiben wir  $\mathcal{B}_\Omega^n$ , wobei  $n$  nun kein Multiindex sondern ein Skalar ist.

Sei  $\Omega$  das Approximationsgebiet und  $I_\Omega$  die Indexmenge der relevanten inneren B-Splines aus  $\mathcal{B}_\Omega^n$ . Weiterhin seien  $P_i(f) \in L^1(\Omega_i)$  eine Reihe von lokalen Approximationen, wobei jedes lokale Gebiet  $\Omega_i$  mindestens eine innere Zelle  $\Gamma'_i$  aus dem Träger  $S_{\Omega,i}$  enthalte. Mit Hilfe der dualen Funktione wird eine eB-Spline Zwei-Schritt-Methode definiert:

**Definition 2.1.1** Die zu den lokalen Approximationen  $P_i(f)$  definierte eB-Spline Zwei-Schritt-Methode sei gegeben durch

$$P(f) := \sum_{i \in I_\Omega} \lambda_i(P_i(f)) B_{\Omega,i},$$

wobei  $\lambda_i$  das in Definition 1.1.6 über die Gitterzelle  $\Gamma'_i$  definierte duale Funktional sei.

Diese Konstruktion erlaubt beliebige lokale Schemata  $P_i$ , allein  $P_i(f) \in L^1(\Omega_i)$  muss gewährleistet sein. Um nun Aussagen über die Approximationsgüte der eB-Spline Zwei-Schritt-Methode treffen zu können, sind Bedingungen an die lokalen Schemata zu stellen. Dazu werden folgende Bezeichnungen eingeführt:

**Definition 2.1.2** Eine eB-Spline Zwei-Schritt-Methode ist

- trägerbasiert, falls  $\Omega_i \subset S_{\Omega,i}$  für alle  $i \in I_\Omega$ ,
- von Größe  $K$ , falls  $\text{diam}(\Omega_i) \leq Kh$  für alle  $i \in I_\Omega$ ,
- von Ordnung  $\nu$ , wenn die lokalen Approximationen Polynome reproduzieren, das heißt, wenn für jedes  $q \in \mathbb{P}^\nu$  und alle  $i \in I_\Omega$

$$P_i(q) = q$$

auf  $\Gamma'_i$  gilt.

- $(p, \nu)$ -stabil, falls eine Konstante  $c$  existiert, für die

$$\max_{i \in I_\Omega} \sup_{f \in W_p^\nu(\Omega_i)} \sup_{\varepsilon \in W_p^\nu(\Omega_i) \setminus 0} \frac{\|P_i(f) - P_i(f - \varepsilon)\|_{L^1(\Gamma'_i)}}{h^{d/p'} (\|\varepsilon\|_{L^p(\Omega_i)} + h^\nu |\varepsilon|_{W_p^\nu(\Omega_i)})} \leq c \quad (2.1)$$

gilt, wobei  $p'$  der zu  $p$  konjugierte Hölder-Exponent sei. Für lineare Approximationsoperatoren ist dies äquivalent zu

$$\max_{i \in I_\Omega} \sup_{f \in W_p^\nu(\Omega_i)} \frac{\|P_i(f)\|_{L^1(\Gamma'_i)}}{h^{d/p'} (\|f\|_{L^p(\Omega_i)} + h^\nu |f|_{W_p^\nu(\Omega_i)})} \leq c. \quad (2.2)$$

Die Konstanten dürfen von der Größe der Zwei-Schritt-Methode abhängen.

Die Konstante  $c$  in (2.1) und (2.2) ist als Lipschitz-Konstante der Operatoren

$$P_i : W_p^\nu(\Omega_i) \rightarrow L^1(\Omega_i)$$

aufzufassen. Dazu sind die Normen entsprechend zu gewichten. Für lineare Operatoren ist insbesondere die stärkere Bedingung

$$\|P_i(f)\|_{L^p(\Gamma'_i)} \leq c \|f\|_{L^p(\Omega_i)}$$

hinreichend, um die  $(p, \nu)$ -Stabilität zu garantieren. Das bedeutet:  $c$  stellt eine Schranke für die Norm der Operatoren dar.

Die  $(p, \nu)$ -Stabilität und die Ordnung der polynomialen Reproduktion sind die einzigen Bedingungen, die in den folgenden Resultaten an die lokalen Approximationsalgorithmen gestellt werden. Somit kommen viele lokale Algorithmen in Frage, angefangen von der Identität über polynomiale Algorithmen bis hin zu kontinuierlicher lokaler Approximation in  $\mathcal{B}_\Omega^n$  (siehe Abschnitt 2.2.1) oder den im Kapitel 3 betrachteten Algorithmen zur Approximation gestreuter Daten.

### 2.1.2. Approximationsgebiete

Wie gut eine Approximation sein kann, hängt wesentlich von der Regularität des Gebietes ab, auf dem approximiert wird.

Wir fordern, dass das Gesamtgebiet  $\Omega$  ein Lipschitz-Gebiet sei. Der Begriff des *Lipschitz-Gebietes* sei hier trotz seiner Bekanntheit erläutert, da nicht alle üblichen Definitionen äquivalent sind.

**Definition 2.1.3** *Ein Gebiet  $\Omega \in \mathbb{R}^d$  erfüllt die Lipschitz Bedingung mit Parametern  $l_\Omega, \epsilon_\Omega$  und  $N_\Omega$ , falls es eine Sammlung offener Rechteck-Parallelepipede  $\{V_k\}_{k \in \{1, \dots, N_\Omega\}}$  und zugehörige orthogonale Koordinatensysteme  $\mathcal{O}_k$  gibt, so dass folgende Bedingungen erfüllt sind:*

1.

$$V_k := \{(x)_k \in \mathbb{R}^d \mid 0 < (x^\iota)_k < a_k^\iota, \iota = 1, \dots, d\}, \quad k = 1, \dots, N_\Omega,$$

wobei  $(x)_k$  die Darstellung eines Vektors in  $\mathbb{R}^d$  bezüglich  $\mathcal{O}_k$  und  $(x^\iota)_k$  die  $\iota$ -te Komponente derselben sei,

2. für  $x \in \partial\Omega$  ist die Kugel mit Radius  $\epsilon_\Omega$  und Zentrum  $x$  Teilmenge von einem  $V_k$ ,

3. falls  $V_k \cap V_l \cap \Omega = \emptyset$  gilt, dann ist  $V_k \cap V_l = \emptyset$ ,

4. für

$$V_k^* = \{\bar{x} \in \mathbb{R}^{(d-1)} \mid 0 < (x^\iota)_k < a_k^\iota, \iota = 1, \dots, (d-1)\}$$

und geeignete Funktionen  $\psi_k : \mathbb{R}^{(d-1)} \rightarrow \mathbb{R}$  sind die Mengen  $\Omega \cap V_k$  von der Gestalt

$$\Omega \cap V_k := \{(\bar{x}, x^d)_k \mid 0 < (x^d)_k < \psi_k(\bar{x}), \bar{x} \in V_k^*\},$$

wobei

$$|\psi_k(\bar{x}) - \psi_k(\bar{y})| \leq l_\Omega \|\bar{x} - \bar{y}\|_2, \quad \bar{x}, \bar{y} \in V_k^*$$

und

$$\epsilon_\Omega < \psi_k(\bar{x}) < a_k^d - \epsilon_\Omega, \quad \bar{x} \in V_k^*.$$

sei.

Wir nehmen an, dass das Approximationsgebiet  $\Omega$  ein Lipschitz-Gebiet mit Parametern  $l_\Omega, \epsilon_\Omega$  und  $N_\Omega$  sei. Darüber hinaus kommen Anforderungen an die lokalen Approximationsgebiete  $\Omega_i$  hinzu. Auch hier eine Lipschitz-Bedingung zu formulieren liegt zunächst nahe, ist jedoch nicht praktikabel.

Abbildung 2.2 zeigt, dass schon der Schnitt eines Lipschitz-Gebietes im  $\mathbb{R}^2$  mit einem Rechteck  $R$ , also einem weiteren hoch regulären Gebiet, nicht notwendigerweise eine Menge sein muss, welche der Lipschitz-Bedingung genügt.

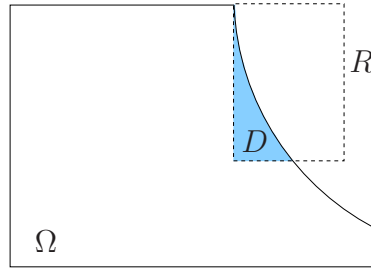


Abbildung 2.2.: nicht regulärer Schnitt zweier Lipschitz-Gebiete

Es sollen einfache Kriterien zur Wahl der lokalen Gebiete gefunden werden. Bei der Fehlerabschätzung spielen Resultate über die lokale, polynomiale Approximation die Schlüsselrolle. Im Folgenden wird ein Resultat vom Typ des *Bramble-Hilbert-Lemmas* [7, 20, 21] bewiesen. Es wird gezeigt, dass es, um die Existenz eines polynomialen Approximanten der erforderlichen Güte zu garantieren, für hinreichend kleine  $h$  ausreichend ist, wenn der Durchmesser lokaler Gebiete in  $h$  beschränkt ist.

**Lemma 2.1.4** *Sei  $Y := [0, 1]^{d-1}$ . Es seien  $r, R > 0$  Konstanten und  $\zeta : Y \mapsto \mathbb{R}^+$  eine stetige Funktion mit  $r \leq \zeta(y) \leq R$  für alle  $y \in Y$ .*

*Es sei*

$$\Sigma := \{(y, z) \in \mathbb{R}^d : y \in Y \text{ und } 0 \leq z \leq \zeta(y)\}.$$

*Für jede Funktion  $f \in W_p^\nu(\Sigma)$  existiert ein Polynom  $q$  der Ordnung  $\nu$  mit*

$$|f - q|_{W_p^m(\Sigma)} \leq \tilde{c}_m |f|_{W_p^\nu(\Sigma)}, \quad m \leq \nu,$$

*wobei die Konstante  $c_m$  nur von  $d, n, R$  und  $r$  abhängt.*

*Beweis:* Sei  $\tilde{\Sigma} := Y \times [0, r] \subset \Sigma$ . Nach dem Bramble-Hilbert-Lemma existiert ein Polynom  $q \in \mathbb{P}^\nu$  der Ordnung  $\nu$  mit

$$|f - q|_{W_p^m(\tilde{\Sigma})} \leq \tilde{c}_m |f|_{W_p^\nu(\tilde{\Sigma})}, \quad m \leq \nu \quad (2.3)$$

und die Konstante  $\tilde{c}_m$  hängt nur von  $d, n$  und  $r$  ab. Wir zeigen, dass dieses Polynom auch auf  $\Sigma$  die gewünschte Abschätzung erfüllt.

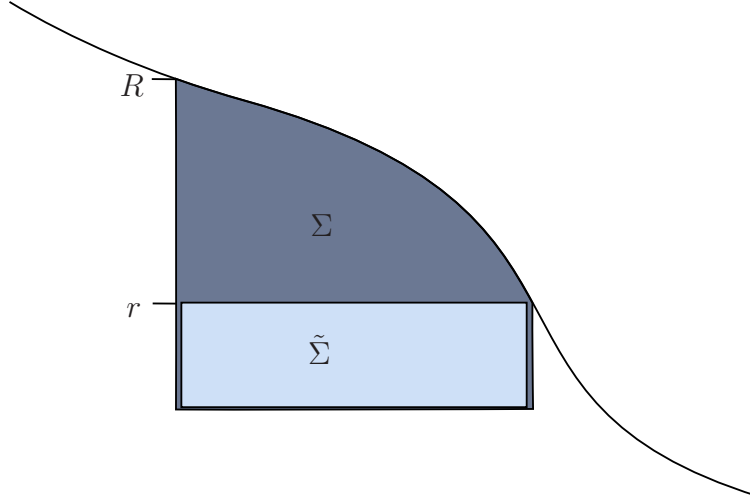


Abbildung 2.3.: Skizze zum Beweis von Lemma 2.1.4

Da die glatten Funktionen in  $W_p^\nu(\Sigma)$  dicht liegen, nehmen wir an,  $f$  sei glatt. Der Beweis folgt über Induktion, beginnend mit dem Fall  $m = \nu$ . Hier gilt für den Multiindex  $\alpha$  mit  $|\alpha| = \nu$ :

$$\|f^{(\alpha)} - q^{(\alpha)}\|_{L^p(\Sigma)} = \|f^{(\alpha)}\|_{L^p(\Sigma)} \leq |f|_{W_p^\nu(\Sigma)}.$$

Angenommen, für ein  $m \leq \nu$  gelte die Annahme, es sei  $|\alpha| = m - 1$ . Wir betrachten die Funktion  $\Delta := f^{(\alpha)} - q^{(\alpha)}$ . Für  $y \in Y$  und  $0 \leq z \leq \zeta(y)$  seien

$$\Delta_1 := \Delta\left(y, r \frac{z}{\zeta(y)}\right), \quad \Delta_2 := \int_0^{\zeta(y)} |\partial_z \Delta(y, t)| dt.$$

Es gilt  $|\Delta| \leq |\Delta_1| + |\Delta_2|$ . Wir betrachten den Fall  $p < \infty$ . Zuerst substituieren wir  $u = r \frac{z}{\zeta(y)}$ , mit (2.3) ergibt sich

$$\begin{aligned} \|\Delta_1\|_{L^p(\Sigma)}^p &\leq \int_Y \int_0^{\zeta(y)} \left| \Delta\left(y, r \frac{z}{\zeta(y)}\right) \right|^p dz dy \\ &\leq \frac{R}{r} \int_Y \int_0^r |\Delta(y, u)|^p du dy \\ &= \frac{R}{r} \|\Delta\|_{L^p(\tilde{\Sigma})}^p \leq \frac{R \tilde{c}_{m-1}^p}{r} |f|_{W_p^\nu(\tilde{\Sigma})}^p \\ &\leq \frac{R \tilde{c}_{m-1}^p}{r} |f|_{W_p^\nu(\Sigma)}^p. \end{aligned}$$



Mit Hilfe der Hölder-Ungleichung und der Induktionsannahme ergibt sich

$$\begin{aligned}
 \|\Delta_2\|_{L^p(\Sigma)}^p &\leq \int_Y \int_0^{\zeta(y)} |\Delta_2(y, z)|^p dz dy \\
 &\leq \int_Y \int_0^{\zeta(y)} \left| \int_0^{\zeta(y)} |\partial_z \Delta(y, t)| dt \right|^p dz dy \\
 &\leq \int_Y \int_0^{\zeta(y)} \left( \left( \int_0^{\zeta(y)} 1^{p'} dt \right)^{1/p'} \left( \int_0^{\zeta(y)} |\partial_z \Delta(y, t)|^p dt \right)^{1/p} \right)^p dz dy \\
 &\leq R^{p/p'} \int_Y \int_0^{\zeta(y)} \int_0^{\zeta(y)} |\partial_z \Delta(y, t)|^p dt dz dy \\
 &\leq R^{1+p/p'} \int_Y \int_0^{\zeta(y)} |\partial_z \Delta(y, t)|^p dt dy \\
 &= R^p \|\partial_z \Delta\|_{L^p(\Sigma)}^p \leq R^p c_m^p |f|_{W_p^\nu(\Sigma)}^p.
 \end{aligned}$$

Zusammen ergibt sich nach Maximierung über  $\alpha$ :

$$\|\Delta\|_{L^p(\Sigma)} \leq \underbrace{\left( R c_m + \left( \frac{R}{r} \right)^{1/p} \tilde{c}_{m-1} \right)}_{c_{m-1}} |f|_{W_p^\nu(\Sigma)}$$

□

Wir betrachten nun Teilgebiete  $\omega$  von  $\Omega$  und die polynomiale Approximation auf diesen:

**Lemma 2.1.5** *Sei  $\omega \subset S_{\Omega, k}$  eine Lebesgue-messbare Menge im Träger des eB-Splines  $B_k$  und*

$$I_\omega := \{i \in I_\Omega : S_{\Omega, i} \cap \omega \neq \emptyset\}.$$

*Für alle  $i \in I_\Omega$  und damit auch in  $I_\omega$  seien die lokalen Gebiete  $\Omega_i$  von beschränktem Durchmesser, das heißt  $\text{diam}(\Omega_i) \leq Kh$  gelte. Für genügend kleine  $h$  existiert eine offene Menge  $\omega' \subset \Omega$ , so dass zu jedem  $f \in W_p^\nu(\Omega)$  ein Polynom  $q \in \mathbb{P}^\nu$  mit folgenden Eigenschaften existiert:*

- $\omega'$  enthält  $\omega$ , sowie  $\Omega_i$  und  $S_{\Omega, i}$  für alle  $i \in I_\omega$ ,
- die Größe von  $\omega'$  ist beschränkt, das heißt es gibt eine Konstante  $c_1$  für die

$$\text{diam}(\omega') \leq c_1 h$$

*gilt,*

- $q$  approximiert  $f$  und es gibt eine Konstante  $c_2$ , für die

$$|f - q|_{W_p^m(\omega')} \leq c_2 h^{\nu-m} |f|_{W_p^\nu(\omega')}, \quad m \leq \nu, \quad (2.4)$$

*gilt.*

## 2. Approximation mit Zwei-Schritt-Methoden

---

Die Konstanten hängen von  $n, \rho, d, \Omega$  und  $K$  ab.

*Beweis:* Zuerst betrachten wir die Menge

$$\tilde{\omega} := \bigcup_{i \in I_\Omega} (S_{\Omega,i} \cup \Omega_i).$$

Nach (1.3) ist  $\text{diam}(S_{\Omega,i})$  durch  $\sigma_\Omega h$  und  $\text{diam}(\Omega_i)$  durch  $Kh$  beschränkt. Für jedes Element  $x \in \tilde{\omega}$  gibt es ein  $i \in I_\omega$  und ein  $x_s \in S_{\Omega,i}$ , so dass  $\|x - x_s\|_2 \leq Kh$ . Der Schnitt  $S_{\Omega,i} \cap \Omega_i$  ist nicht leer, also gibt es ein  $x_\omega \in \omega$  mit  $\|x_s - x_\omega\|_2 \leq \sigma_\Omega h$ . Daraus folgt

$$\text{diam}(\tilde{\omega}) \leq (3\sigma_\Omega + 2K)h.$$

Im zweiten Schritt sei nun  $h$  ausreichend klein gewählt, so dass

$$\frac{\epsilon_\Omega}{2\sqrt{d}} > \epsilon := 5 \max\{K, \sigma_\Omega\}h$$

gilt. Für alle  $y_\omega \in \tilde{\omega}$  enthält der Ball

$$B_\epsilon(y_\omega) := \{z \in \mathbb{R}^d \mid \|z - y_\omega\|_2 < \epsilon\}$$

die Menge  $\tilde{\omega}$ . Es sei  $d_{\tilde{\omega}}$  die Hausdorff-Distanz von  $\partial\Omega$  und  $B_\epsilon(y_\omega)$ , das heißt es gelte  $\|x - y\|_2 > d_{\tilde{\omega}}$  für alle  $x \in \partial\Omega$  und  $y \in B_\epsilon(y_\omega)$ .

Wir unterscheiden zwei Fälle:

1.  $d_{\tilde{\omega}} > \sqrt{d} \epsilon$ :

In diesem Fall liegt  $\tilde{\omega}$  im Inneren von  $\Omega$ , es ist leicht nachzuprüfen, dass der Rechteck-Parallelepiped

$$Q := \{z \in \mathbb{R}^d \mid \|z - y_\omega\|_\infty < \epsilon\} \supset \tilde{\omega}$$

komplett in  $\Omega$  enthalten ist. Wir setzen  $\omega' := Q$ . Es gilt

$$\text{diam } \omega' \leq 2\sqrt{d} \epsilon = 2\sqrt{d} 5 \max\{K, \sigma_\Omega\}h \leq c_1 h$$

Nach dem Bramble-Hilbert-Lemma aus [20, Thm. 7.1] und Skalierung mit dem Faktor  $1/h$  existiert ein  $q \in \mathbb{P}^\nu$  mit den geforderten Eigenschaften und die Konstante in (2.4) hängt nur von  $\epsilon$  ab.

2.  $d_{\tilde{\omega}} \leq \sqrt{d} \epsilon$ :

Es gibt ein  $x \in \partial\Omega$  und ein  $k \in \{1, \dots, N_\Omega\}$ , so dass

$$V_k \cap \Omega \supset B_{\epsilon_\Omega}(x) \supset \{z \in \mathbb{R}^d \mid \|z - y_\omega\|_2 < \sqrt{d}\epsilon\} \supset B_\epsilon(y_\omega) \supset \tilde{\omega}$$

gilt, da  $\Omega$  ein Lipschitz-Gebiet ist.

Wir parametrisieren entsprechend des Koordinatensystems  $\mathcal{O}_k$  und definieren den  $(d-1)$ -dimensionalen Rechteck-Parallelepipid

$$Q^* := \{\bar{z} \in \mathbb{R}^{(d-1)} \mid \exists z^d \text{ mit } \|(\bar{z}, z^d)_k - (y_\omega)_k\|_\infty < \epsilon\}.$$

Es seien

$$r^* := \min_{\bar{z} \in Q^*} \psi_k(\bar{z}), \quad R^* := \max_{\bar{z} \in Q^*} \psi_k(\bar{z}).$$

Da  $\psi_k$  eine Lipschitz-Funktion ist, gilt

$$R^* - r^* \leq l_\Omega \operatorname{diam}(Q^*) \leq l_\Omega \sqrt{d-1} \epsilon.$$

Es sei  $l^* := \min\{y_\omega, r^* - \epsilon\}$ . Wie im Beweis von Lemma 2.1.4 gibt es auf dem  $d$ -dimensionalen Rechteck-Parallelepipid

$$\Sigma^* := Q^* \times (l^*, r^*) \subset V_k \cap \Omega \subset \Omega$$

eine geeigneten polynomialen Approximanten  $q^*$  mit

$$|f - q^*|_{W_p^m(\Sigma^*)} \leq c^* h^{\nu-m} |f|_{W_p^\nu(\Sigma^*)},$$

wobei die Konstanten  $c^*$  wieder nur von  $\epsilon$  abhängt. Wir setzen

$$\begin{aligned} \omega' : &= \{(\bar{z}, z^d)_k \mid l^* \leq (x^d)_k \leq \psi_k(\bar{z}), \bar{z} \in Q^*\} \\ &= \{(\bar{z}, z^d)_k \mid 0 \leq (x^d)_k - l^* \leq \psi_k(\bar{z}) - l^*, \bar{z} \in Q^*\}. \end{aligned}$$

Es gilt  $\Sigma^* \subset \omega' \subset \Omega$  und nach Lemma 2.1.4 existiert ein Polynom  $q$  der Ordnung  $\nu$  mit

$$|f - q|_{W_p^m(\tilde{\omega})} \leq c_2 h^{\nu-m} |f|_{W_p^\nu(\tilde{\omega})}, \quad m \leq n,$$

wobei die Konstante  $c_2$  nur von  $c^*$ ,  $R$  und  $r$  abhängt. In diesem Falle gilt

$$(1 + \sqrt{d})\epsilon \geq r = r^* - l^* \geq 0, \quad R \leq r + l_\Omega \sqrt{d-1} \epsilon \leq c\epsilon,$$

womit gezeigt wäre, dass  $c$  nicht von  $h$ , wohl aber von  $\Omega$  abhängt.

Es gilt

$$\operatorname{diam} \omega' \leq \max\{R, 2\sqrt{d} \epsilon\} \leq c_1 h$$

für geeignetes  $c_1$ .

□

Dies ermöglicht Abschätzungen für Zwei-Schritt-Methoden der Größe  $K$ . Es ist nicht jede Kombination von  $h$  und  $K$  möglich,  $h$  muss hinreichend klein sein. Für trägerbasierte Zwei-Schritt-Methoden ist es nicht notwendig,  $\Omega_i \subset \omega'$  explizit zu fordern, da dies schon aus  $S_{\Omega,i} \subset \omega'$  folgt.

## 2.2. Approximationsgüte

Im Weiteren sollen die Fehler der Approximationen abgeschätzt werden. Die dabei verwendeten Notationen sind folgende:

**Definition 2.2.1** *Der Fehler des Operators  $P(f)$  sei*

$$\Delta := f - P(f),$$

*die Fehler der lokalen Approximationen auf den inneren Gitterzellen seien*

$$\Delta_i := f - P_i(f), \quad i \in I_\Omega.$$

*Die entsprechenden  $L^1$ -Fehlernormen werden verkürzend mit*

$$\|\Delta_i\|_1 := \|\Delta_i\|_{L^1(\Gamma_i)}, \quad i \in I_\Omega$$

*bezeichnet.*

Darüber hinaus wird für alle Konstanten die Abhängigkeit von folgenden Faktoren vorausgesetzt:

- der Splineordnung  $n$ ,
- dem Gebiet  $\Omega$  und insbesondere von  $\sigma_\Omega$  und den Lipschitz-Parametern,
- der Verzerrung des Gitters  $\delta$ ,
- der Dimension des Gebiets  $d$  und
- der Größe  $K$  des Zwei-Schritt-Schemas.

Alle weiteren Größen, welche die Konstanten beeinflussen, werden explizit erwähnt. Insbesondere wird angegeben, wie die Glattheit der zu approximierenden Funktion in die Abschätzung mit eingeht. Die Konstante  $c$  wird als allgemeine Konstante verwendet, deren Wert an den verschiedenen Stellen der Beweise variieren kann.

**Satz 2.2.2** *Sei  $\omega$  eine Lebesgue-messbare Menge, die die Voraussetzung von Lemma 2.1.5 erfüllt und  $\omega'$  die entsprechende Umgebung. So gibt eine Konstante  $c$ , so dass*

$$|\Delta|_{W_p^m(\omega)} \leq c \left( h^{\nu-m} |f|_{W_p^\nu(\omega')} + h^{-d/p'-m} \max_{i \in I_\omega} \|\Delta_i\|_1 \right), \quad m \leq \nu \leq n, \quad (2.5)$$

*für jede Funktion  $f \in W_p^\nu(\omega')$  erfüllt ist. Es sei  $p'$  der zu  $p$  konjugierte Hölderexponent.*

*Beweis:* Sei  $q \in \mathbb{P}^\nu$  das in Lemma 2.1.5 gegebene approximierende Polynom und  $\varepsilon = f - q$ . Durch Einsetzen der Definitionen und Addition der Null bekommt man für den Fehler den Ausdruck

$$\begin{aligned}\Delta &= f - P(f) = f - \sum_{i \in I_\omega} (\lambda_i P_i(f)) B_i \\ &= f + \sum_{i \in I_\omega} (\lambda_i \Delta_i) B_i - \sum_{i \in I_\omega} (\lambda_i f) B_i.\end{aligned}$$

Wegen der polynomialen Präzision und der Linearität des Quasiinterpolanten gilt

$$\begin{aligned}\Delta &= (f - q) + \sum_{i \in I_\omega} (\lambda_i \Delta_i) B_i - \sum_{i \in I_\omega} (\lambda_i (f - q)) B_i \\ &= \varepsilon + \sum_{i \in I_\omega} (\lambda_i \Delta_i) B_i - \sum_{i \in I_\omega} (\lambda_i \varepsilon) B_i.\end{aligned}$$

Nach (1.6) gilt für  $m \leq \nu$  und  $p < \infty$

$$|\Delta|_{W_p^m(\omega)} \leq |\varepsilon|_{W_p^m(\omega)} + c h^{d/p-m} \left( \left( \sum_{i \in I_\omega} |\lambda_i \Delta_i|^p \right)^{1/p} + \left( \sum_{i \in I_\omega} |\lambda_i \varepsilon|^p \right)^{1/p} \right).$$

Die Anzahl der relevanten Indizes  $I_\omega$  ist wegen der Beschränktheit des Gebietes durch eine Konstante beschränkt. Also handelt es sich bei den letzten Termen der obigen Abschätzung um Normen auf dem endlich dimensionalen Vektorraum  $\mathbb{R}^{\#I_\omega}$ . Diese sind zur Maximumsnorm äquivalent, es gilt

$$|\Delta|_{W_p^m(\omega)} \leq |\varepsilon|_{W_p^m(\omega)} + c h^{d/p-m} \left( \max_{i \in I_\omega} |\lambda_i \Delta_i| + \max_{i \in I_\omega} |\lambda_i \varepsilon| \right).$$

Nach der inversen Abschätzung (1.6) gilt dies auch für  $p = \infty$ . Nach (1.2) gilt darüber hinaus

$$\begin{aligned}|\Delta|_{W_p^m(\omega)} &\leq |\varepsilon|_{W_p^m(\omega)} + c h^{d/p-m} \left( h^{-d} \max_{i \in I_\omega} \|\Delta_i\|_1 + h^{-d/p} \max_{i \in I_\omega} \|\varepsilon\|_{L^p(\Gamma'_i)} \right) \\ &\leq |\varepsilon|_{W_p^m(\omega)} + c \left( h^{-d/p'-m} \max_{i \in I_\omega} \|\Delta_i\|_1 + h^{-m} \max_{i \in I_\omega} \|\varepsilon\|_{L^p(\Gamma'_i)} \right).\end{aligned}$$

Es gilt  $\Gamma'_i \subset S_{\Omega,i} \subset \omega'$  für alle  $i \in I_\omega$ . Damit folgt aus der Güte der polynomialen Approximation nach Lemma 2.1.5, dass die zu beweisende Ungleichung (2.5) gilt.  $\square$

Diese Abschätzung gilt für beliebige eB-Spline Zwei-Schritt-Methoden. Beschränken wir uns nun auf speziellere lokale Approximationsschemata:

**Satz 2.2.3** *Sei die betrachtete Zwei-Schritt-Methode  $(p, \nu)$ -stabil, von Größe  $K$  und Ordnung  $\nu$ . Weiterhin sei  $\omega$  eine Lebesgue-messbare Menge, die die Voraussetzungen*

## 2. Approximation mit Zwei-Schritt-Methoden

---

von Lemma 2.1.5 erfüllt und  $\omega'$  die entsprechende Umgebung. So gibt es eine Konstante  $c$ , für die

$$|\Delta|_{W_p^m(\omega)} \leq c h^{\nu-m} |f|_{W_p^\nu(\omega')}, \quad m \leq \nu \leq n, \quad (2.6)$$

für jede Funktion  $f \in W_p^\nu(\omega')$  erfüllt ist.

*Beweis:* Sei erneut  $q \in \mathbb{P}^\nu$  das in Lemma 2.1.5 gegebene approximierende Polynom und  $\varepsilon = f - q$ . Wegen der polynomialen Präzision des lokalen Schemas gilt

$$\Delta_i = f - P_i(f) = (f - q) - (P_i(f) - P_i(q)) \text{ auf } \Gamma'_i.$$

Wegen der  $p$ -Stabilität gilt für alle  $i \in I_\omega$

$$\begin{aligned} \|\Delta_i\|_1 &\leq \|\varepsilon\|_{L^1(\Gamma'_i)} + \|P_i(f) - P_i(q)\|_{L^1(\Gamma'_i)} \\ &\leq \|\varepsilon\|_{L^1(\Gamma'_i)} + ch^{d/p'} (\|\varepsilon\|_{L^p(\Omega_i)} + h^\nu \|\varepsilon\|_{W_p^\nu(\Omega_i)}) \\ &\leq h^{d/p'} \|\varepsilon\|_{L^p(\Gamma'_i)} + ch^{d/p'} (\|\varepsilon\|_{L^p(\Omega_i)} + h^\nu \|\varepsilon\|_{W_p^\nu(\Omega_i)}). \end{aligned}$$

Nun sind  $\Gamma'_i \subset \omega'$  und  $\Omega_i \subset \omega'$  nach Voraussetzung und somit nach Lemma 2.1.5

$$\|\Delta_i\|_1 \leq h^{d/p'} h^{\nu-0} |f|_{W_p^\nu(\omega')} + ch^{d/p'} (h^{\nu-0} |f|_{W_p^\nu(\omega')} + h^\nu h^{\nu-\nu} |f|_{W_p^\nu(\omega')}) \leq ch^{\nu+d/p'} |f|_{W_p^\nu(\omega')}.$$

In (2.5) eingesetzt ergibt dies (2.6).  $\square$

Nun soll der Fehler auf größeren Teilgebieten von  $\Omega$  abgeschätzt werden, zuerst wieder für allgemeine Zwei-Schritt-Methoden:

**Satz 2.2.4** *Sei  $D \subset \Omega$  ein Lebesgue-messbares Teilgebiet und sei die Indexmenge  $I_D$  gegeben durch*

$$I_D := \{i \in I_\Omega : S_{\Omega,i} \cap D \neq \emptyset\}.$$

*Dann gibt es eine Umgebung  $D' \subset \Omega$  von  $D$  und Konstanten  $c_1, c_2$ , so dass*

$$|\Delta|_{W_p^m(D)} \leq c_1 \left( h^{\nu-m} |f|_{W_p^\nu(D')} + h^{-d/p'-m} \|\Delta_D\|_p \right), \quad m \leq \nu \leq n, \quad (2.7)$$

*für jede Funktion  $f \in W_p^\nu(\Omega)$  erfüllt ist, wobei  $\Delta_D := (\|\Delta_i\|_1)_{i \in I_D}$  sei. Außerdem ist*

$$\text{diam}(D') \leq c_2 h + \text{diam}(D).$$

*Beweis:* Es sei

$$K_D := \{k \in \mathbb{Z}^d : \Gamma_k \cap D \neq \emptyset\}$$

die Indexmenge der Gitterzellen, die  $D$  schneiden. Wir setzen  $\omega_k := \Gamma_k \cap \Omega$ , entsprechend seien  $\omega'_k$  die durch Lemma 2.1.5 definierten Umgebungen. Somit gilt

$$D \subset \bigcup_{k \in K_D} \omega_k$$

und

$$|\Delta|_{W_p^m(D)}^p \leq \sum_{k \in K_D} |\Delta|_{W_p^m(\omega_k)}^p.$$

Nach Satz 2.2.2 folgt

$$|\Delta|_{W_p^m(D)}^p \leq c \left( \sum_{k \in K_D} h^{\nu-m} |f|_{W_p^\nu(\omega'_k)} + h^{-d/p'-m} \max_{i \in I_{\omega_k}} \|\Delta_i\|_1 \right)^p.$$

Mit der Normäquivalenz auf  $\mathbb{R}^{\#K_D}$  ergibt dies

$$|\Delta|_{W_p^m(D)}^p \leq c \left( h^{p(\nu-m)} \sum_{k \in K_D} |f|_{W_p^\nu(\omega'_k)}^p + h^{p(-d/p'-m)} \sum_{k \in K_D} \max_{i \in I_{\omega_k}} \|\Delta_i\|_1^p \right).$$

Sei

$$D' := \bigcup_{k \in K_D} \omega'_k.$$

Jeder Punkt in  $D'$  ist nur in beschränkt vielen Mengen  $\omega'_k$  enthalten, das heißt es gibt eine Konstante  $c$ , so dass gilt

$$\sum_{k \in K_D} |f|_{W_p^\nu(\omega'_k)}^p \leq c |f|_{W_p^\nu(D')}^p.$$

Ebenso gibt es eine Konstante  $c$ , so dass der Faktor  $\|\Delta_i\|_1$  für alle  $i \in I_D$  weniger als  $c$  mal in der zweiten Summe vorkommt. Damit ergibt sich

$$|\Delta|_{W_p^m(D)}^p \leq c \left( h^{p(\nu-m)} |f|_{W_p^\nu(D')}^p + h^{p(-d/p'-m)} \sum_{i \in I_D} \|\Delta_i\|_1^p \right).$$

Erneut gilt wegen der Normäquivalenz

$$|\Delta|_{W_p^m(D)}^p \leq c \left( h^{p(\nu-m)} |f|_{W_p^\nu(D')}^p + h^{p(-d/p'-m)} \|\Delta_D\|_p^p \right).$$

Somit ist (2.7) bewiesen.

Seien  $x', y' \in D'$ , es existieren  $k_x$  und  $k_y$ , so dass  $x' \in \omega'_{k_x}$  und  $y' \in \omega'_{k_y}$ . Weiterhin existieren  $x \in \omega_{k_x} \cap D$  und  $y \in \omega_{k_y} \cap D$ , nach Lemma 2.1.5 gilt

$$\|x' - y'\|_2 \leq \|x' - x\|_2 + \|x - y\|_2 + \|y - y'\|_2 \leq ch + \text{diam}(D).$$

□

Dieses Resultat ist in seiner Allgemeinheit nur von Interesse, wenn die untersuchte Funktion auf dem Gebiet nicht gleichmäßig glatt ist. Von großer Bedeutung ist jedoch der Fall  $D = \Omega$ . Hier gilt:

**Korollar 2.2.5** *Es gibt eine Konstante  $c$ , für die*

$$|\Delta|_{W_p^m(\Omega)} \leq c \left( h^{\nu-m} |f|_{W_p^\nu(\Omega)} + h^{-d/p'-m} \|\Delta_\Omega\|_p \right), \quad m \leq \nu \leq n, \quad (2.8)$$

für jede Funktion  $f \in W_p^\nu(\Omega)$  erfüllt ist, wobei  $\Delta_\Omega := (\|\Delta_i\|_1)_{i \in I_\Omega}$  ist.

Daraus ergibt sich:

**Satz 2.2.6** *Sei die betrachtete Zwei-Schritt-Methode  $(p, \nu)$ -stabil und von Ordnung  $\nu$  und seien  $D, D'$  und  $I_D$  wie in Satz 2.2.4. Es gibt Konstanten  $c_1, c_2$ , so dass*

$$|\Delta|_{W_p^m(D)} \leq c_1 h^{\nu-m} |f|_{W_p^\nu(D')}, \quad m \leq \nu \leq n, \quad (2.9)$$

für jede Funktion  $f \in W_p^\nu(D')$  und

$$|\Delta|_{W_p^m(\Omega)} \leq c_2 h^{\nu-m} |f|_{W_p^\nu(\Omega)}, \quad m \leq \nu \leq n, \quad (2.10)$$

für jede Funktion  $f \in W_p^\nu(\Omega)$  erfüllt sind.

*Beweis:* Es seien  $K_D, I_D$  wie in dem Beweis von Satz 2.2.4 definiert. Analog zu dem Beweis von Satz 2.2.3 gilt

$$\|\Delta_i\|_1 \leq ch^{\nu+d/p'} |f|_{W_p^\nu(\omega'_k)}, \quad i \in I_D, k \in K_D.$$

Es gibt eine Konstante, so dass für jedes  $i \in I_D$

$$\#\{k \in K_D : S_{\Omega,i} \cap \omega_k \neq \emptyset\} \leq c.$$

Somit ist

$$\begin{aligned} \|\Delta_D\|_p &\leq ch^{\nu+d/p'} \left( \sum_{k \in K_D} |f|_{W_p^\nu(\omega'_k)^p} \right)^{1/p} \\ &\leq ch^{\nu+d/p'} |f|_{W_p^\nu(D')}. \end{aligned}$$

Dies beweist (2.9) und für  $D = \Omega$  auch (2.10).  $\square$

### 2.2.1. Zwei-Schritt $L^2$ -Approximation

Definieren wir zuerst den Approximationsoperator der kontinuierlichen  $L^2$ -Approximation. Die Zwei-Schritt-Methode sei  $\tilde{\mathcal{P}} := (\tilde{P}_i)_{i \in I_\Omega}$ . Wir betrachten einen lokalen Operator auf dem lokalen Gebiet  $\omega = \Omega_k$  mit  $\omega \supset \Gamma'_k$  und  $\text{diam}(\omega) \leq Kh$ . Der Lesbarkeit halber sei dieser mit  $\tilde{P} = \tilde{P}_k$  bezeichnet und definiert als

$$\tilde{P} : L^1(\omega) \ni f \mapsto a_\omega B_\omega \in \mathcal{B}_\omega^n,$$



wobei  $B_\omega := (B_{\omega,i})_{i \in I_\omega}$  ein Spaltenvektor von B-Splines sei und der Vektor  $a_\omega := (a_i)_{i \in I_\omega}$  das Gramsche System  $\tilde{G}a_\omega = \tilde{F}$  mit

$$\tilde{G}_{i,j} := \int_\omega B_{\omega,i} B_{\omega,j} \quad \text{und} \quad \tilde{F}_i := \int_\omega B_{\omega,i} f, \quad i, j \in I_\omega$$

löse. Da die Regeln, nach denen äußere an innere B-Splines angekoppelt werden, auf verschiedenen Gebieten voneinander abweichen, gilt im Allgemeinen  $\mathcal{B}_\omega^n \not\subseteq \mathcal{B}_\Omega^n$ . Trotzdem ist  $\lambda_k(\tilde{P})$  wohldefiniert und  $k \in I_\omega$  ist gewährleistet, da  $\Gamma'_k \subset \Omega_k$ . Es gilt  $\lambda_k(\tilde{P}) = a_{\omega,k}$ , die Berechnung des dualen Funktional ist in diesem Fall also sehr einfach. Bleibt zu überprüfen, ob die im vorherigen Abschnitt formulierten Anforderungen erfüllt sind.

**Satz 2.2.7**  *$\tilde{P}$  ist eine  $(p, \nu)$ -stabile Methode der Ordnung  $n$ .*

*Beweis:* Dass Polynome der Ordnung  $n$  reproduziert werden, ist klar, sind diese doch in  $\mathcal{B}_\Omega^n$  enthalten. Weiterhin ist  $\tilde{P}$  linear, somit reduziert sich der Beweis darauf, eine Konstante  $c$  zu finden, so dass (2.2) erfüllt ist.

Der Rayleigh-Quotient lässt eine Abschätzung der Eigenwerte der Gramschen Matrix zu. Es gilt zusammen mit der Stabilität (1.5) und  $p = 2$  für den kleinsten Eigenwert  $\tilde{\lambda}_{\min}$  die Schranke

$$\tilde{\lambda}_{\min} = \min_{x \in \mathbb{R}^{\#I_\omega}} \frac{x^\top \tilde{G} x}{x^\top x} \geq c_1^{-2}(K) h^d.$$

Nach Lemma 1.2.7 hängt die Konstante  $c_1$  von

$$\sigma_\omega = \max_{i \in I_\omega} \frac{\text{diam}(S_{\omega,i})}{h}$$

ab,  $\sigma_\omega$  ist wiederum für in  $h$  beschränkte  $\omega$  nur von  $n, d, K$  und  $\rho$  abhängig. Die konkrete Wahl von  $\omega$ , insbesondere dessen Regularität, beeinflusst hier nicht die Konstanten. Es gilt

$$\left\| \tilde{G}^{-1} \right\|_2 = \frac{1}{\tilde{\lambda}_{\min}}.$$

Daraus folgt wegen der Normäquivalenz und obiger Abschätzung

$$\left\| \tilde{G}^{-1} \right\|_p = \frac{c}{\tilde{\lambda}_{\min}} \leq c h^{-d}.$$

Die Hölder-Ungleichung, die Lokalität des Trägers und die Definition des Vektors  $\tilde{F}$  ergeben für dessen Einträge die Schranke

$$\begin{aligned} |\tilde{F}_i| &\leq \|B_{\omega,i}\|_{L^{p'}(\omega)} \|f\|_{L^p(\omega)} \leq \|B_{\omega,i}\|_{L^{p'}(S_{\Omega,i})} \|f\|_{L^p(\omega)} \\ &\leq c h^{d/p'} \|f\|_{L^p(\omega)} = c h^{d-d/p} \|f\|_{L^p(\omega)}. \end{aligned}$$

Damit ergibt sich für die Kontrollpunkte

$$\|a_\omega\|_p \leq \left\| \tilde{G}^{-1} \right\|_p \left\| \tilde{F} \right\|_p \leq ch^{-d/p} \|f\|_{L^p(\omega)}.$$

Schließlich folgt mit (1.5) und unter erneutem Anwenden der Hölder-Ungleichung,

$$\left\| \tilde{P}f \right\|_{L^1(\Gamma'_l)} \leq h^{d/p'} \left\| \tilde{P}f \right\|_{L^p(\Gamma'_l)} = h^{d/p'} \|a_\omega B_\omega\|_{L^p(\Gamma'_l)} \leq ch^{d/p'} \|f\|_{L^p(\omega)}.$$

□

Somit ist eine erste eB-Spline Zwei-Schritt-Methode  $\tilde{\mathcal{P}}$  gefunden, die einen im Sinne von (1.9) optimalen Fehler aufweist:

**Korollar 2.2.8** *Sei  $\tilde{\mathcal{P}}$  die oben definierte eB-Spline Zwei-Schritt-Methode, so gibt es eine Konstante  $c$ , so dass*

$$|\tilde{\mathcal{P}}f - f|_{W_p^m(\Omega)} \leq ch^{\nu-m} |f|_{W_p^\nu(\Omega)}, \quad m \leq \nu \leq n, \quad (2.11)$$

für jede Funktion  $f \in W_p^\nu(\Omega)$  gilt.

Dies ergibt sich direkt aus den Sätzen 2.2.7 und 2.2.6. Die lokalen Abschätzungen gelten analog.

## 2.3. Globale Approximation

Mit Hilfe des im vorherigen Abschnitt konstruierten Approximanten  $\tilde{\mathcal{P}}f$  kann man Resultate zu globalen Approximationsverfahren mit erweiterten Splines beweisen.

**Definition 2.3.1** *Ein globaler Approximationsoperator  $\mathcal{P}_\Omega : L^1(\Omega) \rightarrow \mathcal{B}_\Omega^n$  ist*

- splinereproduzierend, falls für alle  $s \in \mathcal{B}_\Omega^n$

$$\mathcal{P}_\Omega s = s$$

*gilt, und*

- $(p, \nu, \Omega)$ -stabil, falls eine Konstante  $c$  existiert, für die

$$\sup_{f \in W_p^\nu(\Omega)} \sup_{g \in W_p^\nu(\Omega) \setminus f} \frac{\left\| \left( \|\mathcal{P}_\Omega f - \mathcal{P}_\Omega g\|_{L^p(\Gamma'_i)} \right)_{i \in I_\Omega} \right\|_p}{\|f - g\|_{L^p(\Omega)} + h^\nu |f - g|_{W_p^\nu(\Omega)}} \leq c \quad (2.12)$$

*gilt. Für lineare Operatoren reduziert sich dies auf*

$$\sup_{f \in W_p^\nu(\Omega)} \frac{\left\| \left( \|\mathcal{P}_\Omega f\|_{L^p(\Gamma'_i)} \right)_{i \in I_\Omega} \right\|_p}{\|f\|_{L^p(\Omega)} + h^\nu |f|_{W_p^\nu(\Omega)}} \leq c. \quad (2.13)$$

In Analogie zu den Resultaten über Zwei-Schritt-Methoden gilt:

**Satz 2.3.2** *Ist  $\mathcal{P}_\Omega$  eine splinereproduzierende,  $(p, \nu, \Omega)$ -stabile globale Approximationsmethode, so gibt es eine Konstante  $c$ , für die*

$$|\mathcal{P}_\Omega f - f|_{W_p^m(\Omega)} \leq ch^{\nu-m} |f|_{W_p^\nu(\Omega)}, \quad m \leq \nu \leq n, \quad (2.14)$$

für jede Funktion  $f \in W_p^\nu(\Omega)$  erfüllt ist.

*Beweis:* Der Beweis verläuft analog zu den vorhergehenden. Es sei  $s := \tilde{\mathcal{P}}f$  und  $g := \mathcal{P}_\Omega f$ . Es gilt

$$|g - f|_{W_p^m(\Omega)} \leq \underbrace{|g - s|_{W_p^m(\Omega)}}_{e_1} + \underbrace{|s - f|_{W_p^m(\Omega)}}_{e_2}.$$

Nach (2.11) ist  $e_2$  beschränkt, damit bleibt nur noch  $e_1$  abzuschätzen. Da  $s \in \mathcal{B}_\Omega^n$ , können wir  $s$  schreiben als

$$s = \sum_{i \in I_\Omega} \lambda_i(s) B_{\Omega,i}.$$

Gleiches gilt für  $g$ , das heißt

$$\begin{aligned} e_1 &= \left| \sum_{i \in I_\Omega} \lambda_i(g - s) B_{\Omega,i} \right|_{W_p^m(\Omega)} \leq ch^{-m} \left\| \sum_{i \in I_\Omega} \lambda_i(g - s) B_{\Omega,i} \right\|_{L^p(\Omega)} \\ &\leq ch^{d/p-m} \left( \sum_{i \in I_\Omega} |\lambda_i(g - s)|^p \right)^{1/p} \leq ch^{d/p-m} \left( \sum_{i \in I_\Omega} (h^{-d/p} \|g - s\|_{L^p(\Gamma'_i)})^p \right)^{1/p} \\ &\leq ch^{-m} \left( \sum_{i \in I_\Omega} (\|\mathcal{P}_\Omega f - \mathcal{P}_\Omega s\|_{L^p(\Gamma'_i)})^p \right)^{1/p}. \end{aligned}$$

Die Umformungen folgen aus den Lemmata 1.2.7 und 1.2.8 sowie aus (1.2) und der Splinereproduktion. Wegen der Stabilität und der Resultate zu Zwei-Schritt-Methoden gilt weiterhin

$$\begin{aligned} e_1 &\leq c(h^{-m} \|f - s\|_{L^p(\Omega)} + h^\nu |f - s|_{W_p^\nu(\Omega)}) \\ &\leq ch^{\nu-m} |f|_{W_p^\nu(\Omega)}. \end{aligned}$$

Damit ist (2.14) bewiesen.  $\square$

Im Vergleich zu den Zwei-Schritt-Methoden ist es für globale Verfahren schwerer zu zeigen, dass sie  $(p, \nu, \Omega)$ -stabil sind. Erneut betrachten wir die  $L^2$ -Approximation als erstes globales Approximationsverfahren, müssen uns aber auf die Abschätzung des Fehlers in  $L^2$  beschränken.

### 2.3.1. Globale $L^2$ -Approximation

Die Bezeichnungen seien analog zu denen aus Abschnitt 2.2.1 gewählt. Es sei

$$\tilde{\mathcal{P}}_\Omega : L^1(\omega) \ni f \mapsto a_\Omega^\top B_\Omega \in \mathcal{B}_\Omega^n$$

der globale Operator, wobei  $B_\Omega := (B_{\Omega,i})_{i \in I_\Omega}$  ein Spaltenvektor von B-Splines sei und der Vektor  $a_\Omega := (a_i)_{i \in I_\Omega}$  das Gramsche System  $\tilde{G}a_\Omega = \tilde{F}$  mit

$$\tilde{G}_{i,j} := \int_\Omega B_{\Omega,i} B_{\Omega,j} \text{ und } \tilde{F}_i := \int_\Omega B_{\Omega,i} f, \quad i, j \in I_\Omega,$$

löse.

**Satz 2.3.3**  $\tilde{\mathcal{P}}_\Omega$  ist eine splinereproduzierende,  $(2, \nu, \Omega)$ -stabile Methode.

*Beweis:* Die Reproduktionseigenschaft folgt aus der Definition. Ebenso gilt ob der Minimierung bezüglich  $L^2$

$$\|\mathcal{P}_\Omega f\|_{L^2(\Omega)} \leq \|f\|_{L^2(\Omega)}.$$

Wegen der Linearität des Operators reicht es

$$\sup_{f \in W_2^\nu(\Omega)} \left\| \left( \|\mathcal{P}_\Omega f\|_{L^2(\Gamma'_i)} \right)_{i \in I_\Omega} \right\|_2 \leq c \|f\|_{L^2(\Omega)}$$

zu zeigen. Für alle  $i \in I_\Omega$  gilt  $\#\{j \in \mathbb{Z}^d : \Gamma'_j = \Gamma'_i\} \leq n^2$ . Es gilt daher

$$\begin{aligned} \left\| \left( \|\mathcal{P}_\Omega f\|_{L^2(\Gamma'_i)} \right)_{i \in I_\Omega} \right\|_2^2 &= \sum_{i \in I_\Omega} \left( \|\mathcal{P}_\Omega f\|_{L^2(\Gamma'_i)} \right)^2 \\ &\leq \sum_{i \in I_\Omega} \int_{\Gamma'_i} |\mathcal{P}_\Omega f|^2 = \sum_{i \in \mathbb{Z}^d} c \int_{\Gamma'_i} |\mathcal{P}_\Omega f|^2 \\ &\leq c \int_\Omega |\mathcal{P}_\Omega f|^2 = c \|\mathcal{P}_\Omega f\|_{L^2(\Omega)}^2 \\ &\leq c \|f\|_{L^2(\Omega)}^2. \end{aligned}$$

□

Anwenden von Satz 2.3.2 ergibt:

**Korollar 2.3.4** Zur globalen  $L^2$ -Approximation  $\tilde{\mathcal{P}}_\Omega$  gibt es eine Konstante  $c$ , so dass

$$|\tilde{\mathcal{P}}_\Omega f - f|_{W_2^m(\Omega)} \leq c h^{\nu-m} |f|_{W_2^\nu(\Omega)}, \quad m \leq \nu \leq n, \quad (2.15)$$

für jede Funktion  $f \in W_2^\nu(\Omega)$  gilt.

Es ist sicherlich natürlich den Fehler in der  $L^2$ -Norm abzuschätzen, aber auch Abschätzungen bezüglich der  $L^\infty$ -Norm sind wünschenswert. Es gibt allgemeine Resultate zur Operatornorm von Projektoren in Räume mit stabilen Basen [56, 57]. Es ist möglich, dass diese auch hier verwendet werden könnten.

### 3. Approximation gestreuter Daten

Die Fragestellung, wie unregelmäßig verteilte Daten durch eine Fläche oder allgemeiner durch skalarwertige Funktionen des  $\mathbb{R}^d$  interpoliert oder approximiert werden können, ist weit verbreitet. Sie tritt zum Beispiel beim Erstellen digitaler Höhenmodelle oder beim Modellieren anderer skalarer Größen auf. Auch andere Bereiche der Mathematik, wie zum Beispiel das kernel learning oder Elastizitätsuntersuchungen, setzen die Approximation gestreuter Daten ein.

Das *scattered data problem* lautet: Gegeben sind Tupel

$$(\xi_i, f_i), \quad i \in \{1, \dots, N\}.$$

Diese bestehen aus je einem Datenpunkt

$$\xi_i \in \Omega \subset \mathbb{R}^d$$

und einem Datenwert  $f_i \in \mathbb{R}$ .

Gesucht ist eine möglichst glatte Funktion  $s : \Omega \mapsto \mathbb{R}$ , die an den Datenpunkten „gut“ approximiert. Die Menge aller Datenpunkte sei  $\Xi := \{\xi_1, \dots, \xi_N\}$ .

Als Gütemaß sind nun verschiedene Kriterien denkbar, zum Beispiel ein möglichst kleiner mittlerer quadratischer Fehler, das heißt, Minimierung von  $\sum_{i=1}^N (s(\xi_i) - f_i)^2$ . Ebenso ist die Kombination dieser Anforderung mit einem Term möglich, der für die Glättung der Funktion sorgt, zum Beispiel durch Minimierung der Biegeenergie. Es stellt sich jedoch immer die Frage, wie gut die Approximation ist, wenn die Datenpunkte von einer Funktion  $f$  stammen, das heißt, falls

$$f_i = f(\xi_i), \quad i = 1, \dots, N.$$

In diesem Fall interessiert der Fehler  $\|f - s\|_{L^p(\Omega)}$ . Dieser ist auch von der Datenpunktdichte abhängig. Für eine punktweise Auswertung von  $f \in W_p^\nu(\Omega)$  nehmen wir weiterhin an, dass  $\nu > d/p$  gelte, damit  $f$  stetig ist. Vor allem Anwendungen aus dem Bereich der graphischen Datenverarbeitung motivieren die hier durchgeführten Untersuchungen. Dies erklärt die Annahme, dass die Daten von einer Funktion stammen, deren Glattheit bekannt ist.

Es gibt etliche Verfahren zur Approximation gestreuter Daten, bei denen verschiedene Funktionenräume verwendet werden. Besonders verbreitet sind gitterlose Verfahren, wie die sogenannten *moving least squares* Methoden [24, 58, 61], die lokalisierte Polynome verwenden, sowie Verfahren, die Radiale Basisfunktionen (RBF) [60, 44] nutzen.

Beiden Ansätzen ist gemein, dass die Anzahl an Basisfunktionen grundsätzlich der Anzahl der Datenpunkte entspricht. Die wachsenden Rechnerkapazitäten relativieren das Problem des großen Rechenaufwands, jedoch ist weiterhin hoher numerischer Aufwand notwendig, um stabile Verfahren zu erhalten. Dies kann sich außerdem negativ auf die Approximationsgüte auswirken. Die Fehlerabschätzungen zu speziellen RBF-Verfahren haben in den letzten Jahren Fortschritte gemacht. Es konnte unter anderem gezeigt werden, dass der  $L^2$ -Fehler von Approximationen mit *thin plate splines* von der Größenordnung  $\mathcal{O}(\text{fd}(\Xi, \Omega)^\nu |f|_{W_2^\nu(\Omega)})$  ist; hier ist  $\text{fd}(\Xi, \Omega)$  die sogenannte Füllstanz (siehe Definition 3.1.2). Bei allgemeineren Resultaten kommt der abschwächende Faktor  $\text{fd}(\Xi, \Omega)^{-d/p}$  hinzu. Im Falle der *moving least squares* Methoden muss beachtet werden, dass die Anzahl der Datenpunkte die Approximationskonstanten verschlechtert, da lokale Häufungen von Datenpunkten die Approximation verschlechtern kann. Dies konnte in [43] durch eine neue Gewichtung verbessert werden.

Gitterbasierte Verfahren mit Splines haben diverse Vorteile, unter anderem die geringe Dimension des Splineräume. Auch können Splineflächen in CAD-Anwendungen direkt weiterbenutzt werden. Trotzdem kommen Splines heute nur in wenigen Verfahren zum Einsatz. Das wesentliche Problem liegt in der mangelnden Stabilität der Splineräume bei beliebig berandeten Gebieten. Damit einher gehen Randartefakte und schlecht konditionierte Gleichungssysteme. Auf polygonalen bzw. polyedrischen Gebieten ist dies irrelevant, hier werden Splines erfolgreich angewendet [40, 11]. Dabei werden Makro-Elemente auf Triangulierungen verwendet. Standard-Tensorprodukt-B-Splines sind sogar nur zur Approximation auf Boxen geeignet.

Es gibt eine Reihe von Zwei-Schritt-Methoden zur Approximation gestreuter Daten auf beliebigen Lipschitz-Gebieten [16, 13, 14]. Hier werden auch Splines und RBF miteinander in hybriden Ansätzen verwandt. Das Problem der Rand-Artefakte ist hier aber stets präsent. So geht ein Faktor zwischen dem Träger der einzelnen Splines und seinem Schnitt mit dem Gebiet in die Approximationskonstante ein. Einen Überblick über die möglichen scattered-data-Verfahren gibt [59], einen älteren Vergleich verschiedener Verfahren findet man in [25].

In diesem Kapitel sollen einfache lokale Approximationsmethoden mit erweiterten B-Splines daraufhin untersucht werden, ob sie die im vorhergehenden Kapitel formulierten Bedingungen für Zwei-Schritt-Methoden mit optimaler Approximationsgüte erfüllen. Es wird für die Methode der kleinsten Fehlerquadrate und eine verwandte gewichtete Methode die Optimalität bewiesen, immer unter Annahmen über die Datendichte. Somit können die oben genannten Probleme gelöst und die offensichtlichen Vorteile der Approximation mit Tensorprodukt-B-Splines können auf beliebige Gebiete übertragen werden. Erneut werden auch Abschätzungen für die globalen Verfahren bewiesen. Der letzte Abschnitt stellt die empirischen Konvergenzraten verschiedener Methoden gegenüber. Es wird diskutiert, wie am besten mit weniger dichten Daten umgegangen werden kann.

### 3.1. Least Squares Fit mit erweiterten B-Splines

Die Methode der kleinsten Fehlerquadrate dürfte dem Leser bekannt sein. Es sei erneut  $\omega := \Omega_k$  und  $\Gamma' := \Gamma'_k$ . Die Datenpunkte in  $\omega$  seien

$$\Xi_\omega := \Xi \cap \omega.$$

Wir definieren einen Operator  $\hat{P} = \hat{P}_k$  mit

$$\hat{P} : C^0(\omega) \ni f \mapsto \hat{a}_\omega^\top B_\omega \in \mathcal{B}_\omega^n$$

über die Normalengleichung  $\hat{G}\hat{a}_\omega = \hat{F}$ , wobei

$$\hat{G}_{i,j} := \sum_{\xi \in \Xi_\omega} B_{\omega,i}(\xi) B_{\omega,j}(\xi), \quad \hat{F}_i := \sum_{\xi \in \Xi_\omega} B_{\omega,i}(\xi) f(\xi), \quad i, j \in I_\omega.$$

Die Normalengleichung ist nur für genügend dichte Daten eindeutig lösbar. Wir fordern, dass die Datenpunkte  $\Xi_\omega$  so dicht liegen, dass für  $s \in \mathcal{B}_\omega^n$  und  $s|_{\Xi_\omega} = 0$  stets  $s = 0$  gelte. In diesem Fall ist die Gleichung eindeutig lösbar und es gilt

$$\left\| (f - \hat{P}f)|_{\Xi_\omega} \right\|_2 = \min_{s \in \mathcal{B}_\omega^n} \|(f - s)|_{\Xi_\omega}\|_2.$$

#### 3.1.1. Fehler der Zwei-Schritt-Methode

Analog zu [12] wird die *Wachstumsrate* von  $\mathcal{B}_\omega^n$  in Abhängigkeit von  $\Xi_\omega$  als

$$\rho(\mathcal{B}_\omega^n, \Xi_\omega) := \max_{s \in \mathcal{B}_\omega^n} \frac{\|s\|_{L^\infty(\Gamma')}}{\|s|_{\Xi_\omega}\|_\infty} = \max\{\|s\|_{L^\infty(\Gamma')} \mid s \in \mathcal{B}_\omega^n, \|s|_{\Xi_\omega}\|_\infty \leq 1\}$$

definiert. Des weiteren sei

$$M := \max_{k \in \mathbb{Z}^d} \#(\Xi \cap \Gamma_k)$$

die maximale Datenpunktanzahl pro Zelle.

**Lemma 3.1.1** *Unter den obigen Annahmen gilt*

$$\frac{\|\hat{P}f\|_{L^1(\Gamma')}}{h^d \|f\|_{L^\infty(\omega)}} \leq c(M) \rho(\mathcal{B}_\omega^n, \Xi_\omega).$$

*Beweis:* Nach der Hölder-Ungleichung und nach der Definition der Wachstumsrate gilt

$$\|\hat{P}f\|_{L^1(\Gamma')} \leq h^d \|\hat{P}f\|_{L^\infty(\Gamma')} \leq h^d \rho(\mathcal{B}_\omega^n, \Xi_\omega) \|\hat{P}f|_{\Xi_\omega}\|_\infty.$$

Weiterhin ist

$$\left\| \hat{P}f|_{\Xi_\omega} \right\|_\infty \leq 2 \left\| \hat{P}f|_{\Xi_\omega} \right\|_2 \leq 4 \|f|_{\Xi_\omega}\|_2 \leq 4\sqrt{\#\Xi_\omega} \|f\|_{L^\infty(\omega)} \leq c(M) \|f\|_{L^\infty(\omega)}.$$

Die letzte Abschätzung ist deswegen möglich, weil die Anzahl von Zellen in  $\omega$  beschränkt ist. Somit erhalten wir die zu beweisende Ungleichung.  $\square$

Bleibt zu untersuchen, unter welchen Bedingungen an die Daten die Wachstumsrate durch eine Konstante beschränkt ist. Dazu definieren wir zuerst ein Maß für die Datendichte.

**Definition 3.1.2** Die Füllabstand einer Menge  $X \subset Y \subset \mathbb{R}^d$  ist

$$\text{fd}(X, Y) := \max_{y \in Y} \min_{x \in X} \|x - y\|_2.$$

Sie entspricht dem Radius des größten Balles mit Zentrum in  $Y$ , welcher kein Element aus  $X$  enthält.

**Lemma 3.1.3** Es gilt  $\rho(\mathcal{B}_\omega^n, \Xi_\omega) \leq 2$ , falls  $\Xi_\omega$  ausreichend dicht in  $\omega$  ist, das heißt, falls  $\text{fd}(\Xi, \omega) \leq ch$  für hinreichend kleines  $c$ .

*Beweis:* Der Beweis folgt einer Idee aus [58], siehe auch [38]. Es sei  $\|s|_{\Xi_\omega}\|_\infty \leq 1$  und  $x \in \Gamma'$  ein Punkt mit  $|s(x)| = \|s\|_{L^\infty(\Gamma')}$ . Es sei  $\xi$  der nächste Datenpunkt zu  $x$  in  $\Gamma'$  und  $\gamma$  der kürzeste Pfad von  $x$  nach  $\xi$  in  $\Gamma'$ , sowie  $l(\gamma)$  seine Länge. Es gilt nach (1.7)

$$\begin{aligned} 1 &\geq |s(\xi)| = |s(x) - (s(x) - s(\xi))| \\ &\geq \left| |s(x)| - \left| \int_\gamma \nabla s(y) dy \right| \right| \\ &\geq \left| |s(x)| - l(\gamma) \max_{y \in \gamma} |\nabla s(y)| \right| \\ &\geq \left| \|s\|_{L^\infty(\Gamma')} - l(\gamma) \frac{c_5}{h} \|s\|_{L^\infty(\Gamma')} \right|. \end{aligned}$$

Wir zeigen zuerst, dass falls  $\text{fd}(\Xi_\omega, \omega) \leq \frac{h}{c_5} \frac{1}{4} \frac{1}{2(1+\sqrt{d})}$  gilt daraus  $l(\gamma) \leq \frac{h}{c_5} \frac{1}{4}$  folgt. Offensichtlich ist  $l(\gamma) = \|x - \xi\|_2$ , da  $\Gamma'$  konvex ist. Angenommen,

$$\|x - \xi\|_2 > \frac{h}{c_5} \frac{1}{4} = 2(1 + \sqrt{d}) \text{fd}(\Xi_\omega, \omega) > 2\sqrt{d} \text{fd}(\Xi_\omega, \omega) := R$$

gelte, dann folgt  $B_R(x) \cap \Gamma' \cap \Xi = \emptyset$ . In  $B_R(x) \cap \Gamma'$  gibt es einen Punkt  $y$ , dessen Abstand zu allen Punkten außerhalb von  $\Gamma'$  mindestens  $\frac{R}{\sqrt{d}} = 2 \text{fd}(\Xi_\omega, \omega)$  beträgt. Wegen der Dichte der Daten gibt es einen Datenpunkt  $\xi_y$  mit  $\|\xi_y - y\|_2 < 2 \text{fd}(\Xi_\omega, \omega)$ . Mit der



Dreiecksungleichung folgt  $\|\xi_y - x\|_2 < 2 \text{fd}(\Xi_\omega, \omega) + R \leq 2(1 + \sqrt{d}) \text{fd}(\Xi_\omega, \omega)$ . Also gilt  $l(\gamma) = \|x - \xi\|_2 \leq \frac{h}{c_5} \frac{1}{4}$ . Es folgt

$$1 \geq \left| \|s\|_{L^\infty(\Gamma')} - \frac{1}{4} \|s\|_{L^\infty(\Gamma')} \right| \geq \frac{1}{2} \|s\|_{L^\infty(\Gamma')}$$

und damit

$$\|s\|_{L^\infty(\Gamma')} \leq 2.$$

□

Für die entsprechende Zwei-Schritt-Methode  $\hat{\mathcal{P}} := (\hat{P}_i)_{i \in I_\Omega}$  gilt:

**Satz 3.1.4** *Für genügend dichte Daten im Sinne von Lemma 3.1.3 ist  $\hat{\mathcal{P}}$  eine  $(\infty, \nu)$ -stabile Methode der Ordnung  $n$ .*

Ein Beweis erübrigt sich, da die Stabilität bereits gezeigt wurde und die Reproduktion von Polynomen der Ordnung  $n$  auf der Hand liegt, da diese in  $\mathcal{B}_\omega^n$  enthalten sind. Nach Satz 2.2.6 folgt daraus:

**Korollar 3.1.5** *Sei  $\hat{\mathcal{P}}$  die oben definierte eb-Spline Zwei-Schritt-Methode, so gibt es eine Konstante  $c$ , so dass für genügend dichte Daten*

$$|\hat{\mathcal{P}}f - f|_{W_\infty^m(\Omega)} \leq c(M)h^{\nu-m}|f|_{W_\infty^\nu(\Omega)}, \quad m \leq \nu \leq n, \quad (3.1)$$

für jede Funktion  $f \in W_\infty^\nu(\Omega)$  gilt.

### 3.1.2. Einfluss der Datenpunktanzahl

Das Problem des obigen Resultates liegt in der Abhängigkeit der Konstanten von der Datenpunktanzahl. Einerseits wird eine hohe Datendichte in Form einer kleinen Fülldistanz gefordert, andererseits können sich aber viele Datenpunkte kontraproduktiv auf die Approximationsgüte auswirken.

Dies illustriert das folgende Beispiel:

Es sei  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $(x, y) \mapsto 1 - x^2 - y^2$  die zu approximierende Funktion und  $G := (-h, h)^2 \subset \Omega \subset \mathbb{R}^2$  eine Gitterzelle des bivariaten Splinegitters, so dass jeder Spline aus  $\mathcal{B}_\Omega^2$  auf  $G$  eine bilineare Funktion ist.

Die Datenpunkte  $\Xi$  sind folgendermaßen gewählt: Zuerst definieren wir die Menge

$$\Xi_1 := \epsilon \mathbb{Z}^2 \cap \Omega,$$

wobei  $\epsilon$  so gewählt sei, dass die Anforderungen an die Fülldistanz aus Lemma 3.1.3 erfüllt sind. Nun sei eine Ebene im  $\mathbb{R}^3$  gegeben als Graph der Funktion  $s : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $(x, y) \mapsto 1 - h^2 - 2k h x$  für  $k \in \mathbb{N}$ . Wir betrachten die Schnittkurve der Ebene mit

dem Graphen der Funktion  $f$  über  $G$  und projizieren diese nach  $G$  zurück. Damit erhalten wir die Menge

$$\sigma := \{(x, y) \in (-h, h)^2 : h^2 - x^2 - y^2 = 2k h x\}.$$

Eine weitere Datenpunktmenge  $\Xi_2$  wird nun aus  $\sigma$  gewählt. Wählt man diese groß genug, so nähert sich der Least Squares Fit immer mehr der Ebene. Abbildung 3.1 veranschaulicht dieses Verhalten. Die oberen Bilder stellen den Funktionsgraph samt Datenpunkten  $\Xi_1$  dar sowie die lineare Approximation dieser auf der Zelle  $(-1/2, 1/2)^2$ . Die unteren Abbildungen zeigen die hinzugefügten Datenpunkte auf der Schnittkurve sowie die lineare Approximation, welche bereits in den Ecken von  $(-1/2, 1/2)^2$  große Fehler aufweist.

Nun wird gezeigt, dass der Fehler auf  $G$  tatsächlich nicht mehr in  $\mathcal{O}(h^2)$  liegt, wenn die Steigung der Ebene, das heißt  $k$ , groß ist:

Es sei  $r := \|f|_{\Xi_1} - s|_{\Xi_1}\|_2$  und  $N$  eine natürliche Zahl, die so gewählt ist, dass

$\delta := r/\sqrt{N} < h^2/18$  gilt. Für jedes  $y_i = \frac{ih}{3N} \in [-h, h]$ ,  $i = -3N, \dots, 3N$ , gibt es ein eindeutiges  $x_i$  mit  $(x_i, y_i) \in \sigma$ . Hierbei gilt  $x_i = x_{-i}$  und  $0 \leq x_i \leq x_0 \leq \frac{h}{2k}$ . Die zweite Datenpunktmenge setzen wir als  $\Xi_2 = \{\xi_i = (x_i, y_i) : i = -N, \dots, N\}$ . Weiterhin sei  $\Xi := \Xi_1 \cup \Xi_2$ . Es sei  $s^*$  der bilineare Spline, der durch die Least Squares Approximation von  $f$  gegeben ist.

Da  $s|_{\sigma} = f|_{\sigma}$ , gilt  $\|f|_{\Xi} - s|_{\Xi}\|_2 = r$ . Nun liegt  $s$  in  ${}^e B_{\Omega}^2$ . Das impliziert

$$\|f|_{\Xi} - s^*|_{\Xi}\|_2 \leq r.$$

Daraus folgt die Existenz eines  $i_1$  mit  $2N \leq i_1 \leq 3N$ , für das  $|f(\xi_{i_1}) - s^*(\xi_{i_1})| < \delta$  und  $|f(\xi_{-i_1}) - s^*(\xi_{-i_1})| < \delta$ , denn bei Nichtexistenz eines solchen würde gelten

$$\|f|_{\Xi} - s^*|_{\Xi}\|_2^2 \geq \sum_{i=2N}^{3N} \delta^2 > r^2.$$

Es gilt darüber hinaus  $|f(\xi_{i_1})| = |f(\xi_{-i_1})| \leq f(\xi_{2N}) \leq 1 - 4h^2/9$  und somit

$$\max\{s^*(\xi_{i_1}), s^*(\xi_{-i_1})\} \leq 1 - 4h^2/9 + \delta \leq 1 - h^2 7/18.$$

Da  $s^*|_G$  eine bilineare Funktion ist, ist sie linear entlang der Geraden  $x = x_{i_1}$ . Daraus folgt

$$s^*(x_{i_1}, 0) \leq 1 - h^2 \frac{7}{18}.$$

Analog existiert ein  $i_2$  mit  $0 \leq i_2 \leq N$ , für das  $|f(\xi_{i_2}) - s^*(\xi_{i_2})| < \delta$  und  $|f(\xi_{-i_2}) - s^*(\xi_{-i_2})| < \delta$  gilt. Ebenso gilt  $|f(\xi_{i_2})| = |f(\xi_{-i_2})| \geq f(\xi_N) \geq 1 - h^2/9 - (h/2k)^2$ , daraus folgt  $\min\{s^*(\xi_{i_2}), s^*(\xi_{-i_2})\} > 1 - h^2/4$  und

$$s^*(x_{i_2}, 0) \geq 1 - h^2/4.$$

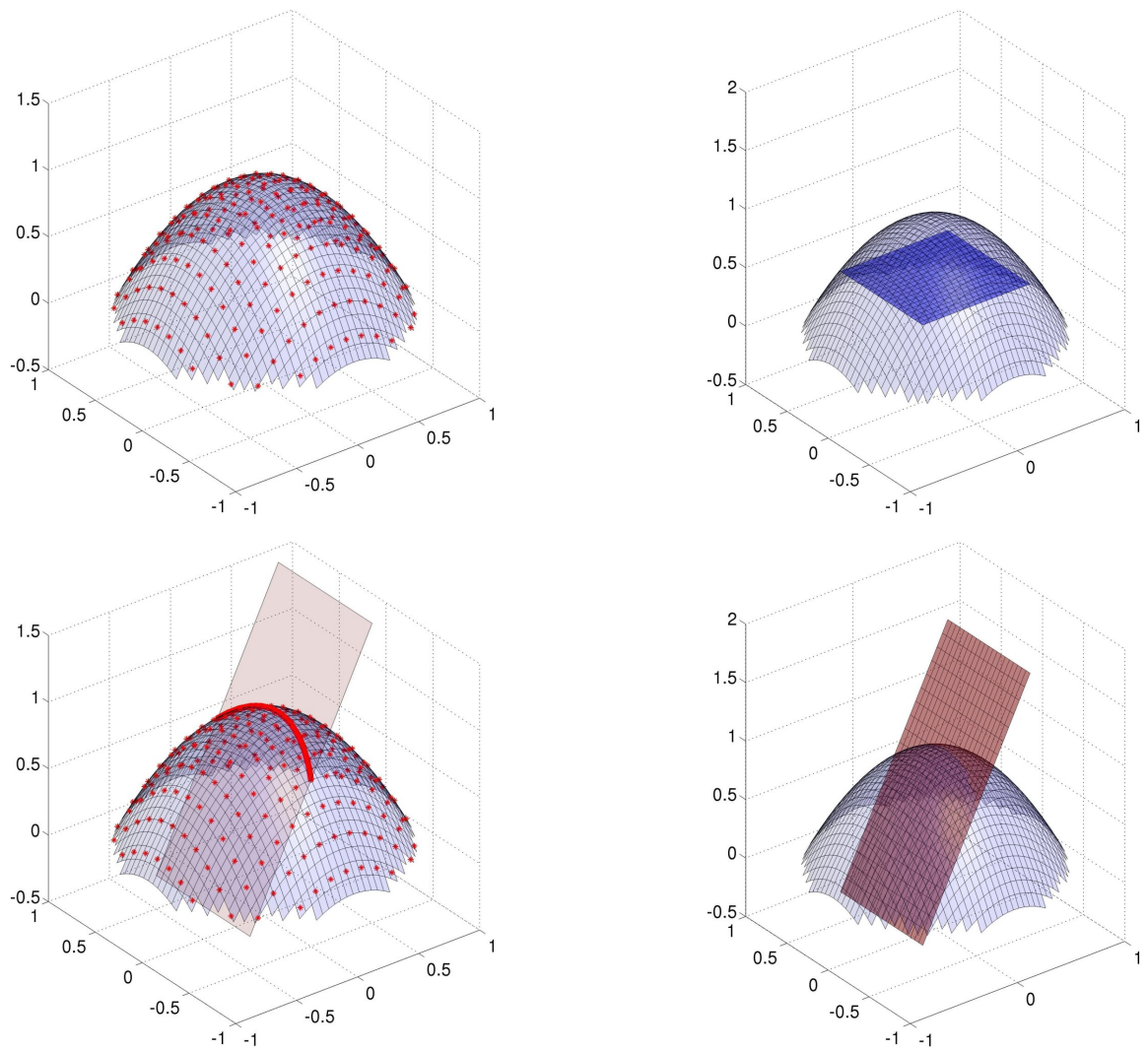


Abbildung 3.1.: lineare Approximationen von  $f(x,y) = 1 - x^2 - y^2$  auf  $(-1/2, 1/2)^2$

Wieder gilt, dass  $s^*|_G$  entlang der Geraden  $y = 0$  linear ist, wodurch  $|x_{i_1} - x_{i_2}| \leq h/(2k)$  gelten muss. Die Steigung der linearen Funktion muss damit mindestens  $kh/6$  betragen. Deshalb ist  $s^*(h,0) - s^*(x_{i_2},0) \geq (2k-1)h^2/12$  und  $s^*(h,0) - f(h,0) > kh^2/6$ , das heißt

$$\|f - s^*\|_{L^\infty(G)} > \frac{kh^2}{6}. \quad (3.2)$$

Der Approximationsfehler liegt also nicht in  $\mathcal{O}(h^2|f|_{W_\infty^2(\Omega)})$ . Das erklärt die Abhängigkeit der Konstanten aus Lemma 3.1.3–3.1.5 von der Datenpunktzahl  $m$ .

Auf die Untersuchung des globalen Algorithmus verzichten wir an dieser Stelle aufgrund der Abhängigkeit der Konstanten von der Datenpunktzahl. Stattdessen wenden wir uns einem Algorithmus zu, der diese Schwäche nicht aufweist.

## 3.2. Gewichteter Least Squares Fit mit erweiterten B-Splines

Es wird eine gewichtete Version der Methode der kleinsten Fehlerquadrate [61, 43] vorgestellt. Das Maß für die Datendichte sei folgendermaßen definiert: Für  $r \in \mathbb{N}$  sei  $U_r^\ell$  zu  $T^\ell$  eine verfeinerte Knotenfolge mit den Knoten

$$u_{rl+m}^\ell := t_l^\ell + l_l^\ell \frac{m}{r}, \quad l \in \mathbb{Z}, m = 0, \dots, r-1.$$

Die entsprechenden Teilzellen seien mit

$$\gamma_k := [u_{k1}^1, u_{k1+1}^1) \times \dots \times [u_{kd}^d, u_{kd+1}^d)$$

bezeichnet. Für alle  $k \in \mathbb{Z}^d$  sind die Seitenlängen von  $\gamma_k$  beschränkt, von oben durch  $h_r := h/r$  und von unten durch  $h_r/\rho$ .

Um die lokale Approximation  $\check{P}_i f$  zu berechnen, wählen wir eine Untermenge  $\Xi_i \subset \Xi$  von Datenpunkten, so dass

$$\Gamma'_i \subset \omega_i := \bigcup_{\xi \in \Xi_i} \gamma_\xi, \quad (3.3)$$

wobei  $\gamma_\xi$  die Teilzelle ist, die  $\xi$  enthält.

Für genügend dichte Daten, das heißt, falls jede Teilzelle der inneren Zelle  $\Gamma'_i \subset S_{\Omega,i}$  mindestens einen Datenpunkt enthält, gilt  $\Gamma'_i \subset \omega_i$ . Wir sagen, dass  $\Xi$  bezüglich der Knotenfolge  $T$  die *relative Datendichte*  $r$  besitzt, falls für jedes  $i \in I_\Omega$  die innere Zelle  $\Gamma'_i$  in  $\bar{\omega} = \omega_i$  enthalten ist. Wichtig ist, dass  $\omega_i$  keine Teilmenge von  $\Omega$  sein muss. Das lokale Approximationsgebiet ist dann  $\omega = \omega_i \cap \Omega$ .

Für genügend große  $r$  kann man ein gewichtetes Approximationsschema definieren. Das Gewicht  $d(\xi)$  eines Datenpunktes  $\xi$  sei dabei über die ihn enthaltende Teilzelle bestimmt. Für  $\xi \in \gamma_k$  einer Zelle mit  $z_k$  Datenpunkten aus  $\Xi_i$  ist

$$d(\xi) := \frac{\text{vol}(\gamma_k)}{z_k}.$$

Isolierte Datenpunkte erhalten also ein größeres Gewicht als solche, welche dicht beieinander liegen

Wir definieren einen Operator  $\check{P} = \check{P}_k$  der *Methode der gewichteten Fehlerquadrate*

$$\check{P} : C^0(\omega) \ni f \mapsto \check{a}_\omega^\top B_\omega \in \mathcal{B}_\omega^n$$

über die Normalengleichung  $\check{G}\check{a}_\omega = \check{F}$  mit

$$\check{G}_{i,j} := \sum_{\xi \in \Xi_\omega} B_{\omega,i}(\xi) B_{\omega,j}(\xi) d(\xi), \quad \check{F}_i := \sum_{\xi \in \Xi_\omega} B_{\omega,i}(\xi) f(\xi) d(\xi), \quad i, j \in I_\omega.$$

Der Spline  $\check{a}_\omega^\top B_\omega$  minimiert dann den gewichteten Fehler

$$\sum_{\xi \in \Xi_\omega} (\check{a}_\omega^\top B_\omega(\xi) - f(\xi))^2 d(\xi).$$

### 3.2.1. Fehler der Zwei-Schritt-Methode

Die Fälle  $p = \infty$  und  $p < \infty$  werden getrennt betrachtet.

**Satz 3.2.1** *Sei  $p = \infty$  und die relative Datendichte  $r$  sei ausreichend groß. Dann ist der Operator  $\check{P}$  wohldefiniert. Die entsprechende Zwei-Schritt-Methode  $\check{P}_\Omega$  ist  $(\infty, \nu)$ -stabil und von Ordnung  $n$ .*

*Beweis:* Die Grundidee der Beweisführung besteht darin, die Gramsche Matrix der kontinuierlichen  $L^2$ -Approximation mit der beschriebenen gewichteten Methode zu vergleichen. Der restliche Beweis verläuft weitgehend analog zum  $L^2$ -Fall.

Es sei also  $\bar{G}$  die Gramsche Matrix zur Menge  $\bar{\omega}$ , mit Einträgen  $\bar{G}_{i,j} := \int_{\bar{\omega}} B_{\omega,i} B_{\omega,j}$ . Die Matrix ist auch dann wohldefiniert, wenn  $\bar{\omega} \not\subseteq \Omega$ . Genau wie im Beweis von Satz 2.2.1 ist der kleinste Eigenwert von  $\bar{G}$  beschränkt, es gilt  $\bar{\lambda}_{\min} \geq c_1^{-1} h^d$ . Dies wird genutzt, um den kleinsten Eigenwert von  $\check{G}$  abzuschätzen. Für die Matrixeinträge gilt

$$\bar{G}_{i,j} - \check{G}_{i,j} = \sum_{k \in K} \left( \int_{\gamma_k} B_{\omega,i} B_{\omega,j} - \sum_{\xi \in \gamma_k \cap \Xi_i} B_{\omega,i}(\xi) B_{\omega,j}(\xi) d(\xi) \right).$$

Für alle Punkte in einer Teilzelle  $\gamma_k$  sind die Gewichte gleich. Des Weiteren gibt es nach dem Mittelwertsatz einen Punkt  $\eta_k \in \gamma_k$  mit

$$B_{\omega,i}(\eta_k) B_{\omega,j}(\eta_k) = \frac{1}{z_k} \sum_{\xi \in \gamma_k \cap \Xi_i} B_{\omega,i}(\xi) B_{\omega,j}(\xi).$$

Daraus ergibt sich

$$\begin{aligned} \left| \int_{\gamma_k} B_{\omega,i} B_{\omega,j} - \sum_{\xi \in \gamma_k \cap \Xi_i} B_{\omega,i}(\xi) B_{\omega,j}(\xi) d(\xi) \right| &= \left| \int_{\gamma_k} (B_{\omega,i} B_{\omega,j} - B_{\omega,i}(\eta_k) B_{\omega,j}(\eta_k)) \right| \\ &\leq ch_r \int_{\gamma_k} \|\nabla B_{\omega,i} B_{\omega,j}\|_1. \end{aligned}$$

### 3. Approximation gestreuter Daten

---

Der Gradient ist auf der Teilzelle beschränkt, das heißt, es gibt eine Konstante  $c$ , so dass  $\|\nabla B_{\omega,i} B_{\omega,j}\|_1 \leq c/h$  gilt. Damit ergibt sich

$$\left| \bar{G}_{i,j} - \check{G}_{i,j} \right| \leq c \frac{h_r}{h} \sum_{k \in K} \int_{\gamma_k} 1 = c \frac{\text{vol}(\bar{\omega})}{r} \leq c \frac{h^d}{r}.$$

Die Eigenwerte einer Matrix hängen stetig von deren Einträgen ab, deswegen erhalten wir die Abschätzung

$$\check{\lambda}_{\min} \geq \bar{\lambda}_{\min} - c \frac{h^d}{r} \geq \underbrace{\left( c_1 - \frac{c}{r} \right)}_{\check{c}} h^d.$$

Unter der Annahme, dass  $r$  groß genug ist, ist  $\check{c}$  positiv. Insbesondere ist dann  $\check{G}$  invertierbar und  $\check{P}$  wohldefiniert. Für die inverse Matrix gilt, wie bereits gesehen,  $\left\| \check{G}^{-1} \right\|_{\infty} \leq c h^{-d}$ . Auch die Einträge von  $\check{F}$  sind beschränkt, denn es gilt

$$\begin{aligned} \left| \check{F}_i \right| &\leq \sum_{k \in K} \sum_{\xi \in \gamma_k \cap \Xi_i} |B_{\omega,i}(\xi)| |f(\xi)| d(\xi) \\ &\leq c \|f\|_{L^\infty(\omega)} \sum_{k \in K} \text{vol}(\gamma_k) \\ &\leq c h^d \|f\|_{L^\infty(\omega)}. \end{aligned}$$

Damit ergibt sich

$$\|\check{a}_\omega\|_\infty \leq \left\| \check{G}^{-1} \right\|_\infty \left\| \check{F} \right\|_\infty \leq c \|f\|_{L^\infty(\omega)}$$

und schließlich

$$\begin{aligned} \left\| \check{P}f \right\|_{L^1(\Gamma')} &\leq h^d \left\| \check{P}f \right\|_{L^\infty(\Gamma')} \\ &\leq h^d \left\| \check{a}_\omega^\top B_\omega \right\|_{L^\infty(\omega)} \leq c h^d \|f\|_{L^\infty(\omega)}. \end{aligned}$$

□

Für allgemeine  $p$  muss die Wahl der lokalen Gebiete leicht eingeschränkt werden: Die Datenmengen  $\Xi_i$  der lokalen Approximationen seien so gewählt, dass

$$\Gamma'_i \subset \Omega_i := \bigcup_{\xi \in \Xi_i} \gamma_\xi \subset \Omega \quad (3.4)$$

gilt. Dies bedeutet, dass Datenpunkte in der Nähe des Randes unberücksichtigt bleiben. In diesem Falle sagen wir, dass die lokalen Gebiete  $\Omega_i$  die *Box-Eigenschaft* erfüllen.

**Satz 3.2.2** *Sei  $p < \infty$ ,  $\nu > d/p$  und die relative Datendichte  $r$  sei ausreichend groß. Dann ist der Operator  $\check{P}$  wohldefiniert. Die entsprechende Zwei-Schritt-Methode  $\check{P}_\Omega$  ist  $(p, \nu)$ -stabil und von Ordnung  $n$ , falls alle lokalen Gebiete  $\Omega_i$  die Box-Eigenschaft erfüllen.*

*Beweis:* Die im vorhergehenden Beweis gezeigten Eigenschaften von  $\check{G}$  gelten auch hier. Insbesondere gilt wegen der Normäquivalenz  $\|\check{G}\|_p \leq ch^{-d}$  für hinreichend große  $r$ . Wieder schätzen wir zuerst die Einträge von  $\check{F}$  ab:

$$\begin{aligned} |\check{F}_i| &= \sum_{k \in K} \sum_{\xi \in \gamma_k} |B_{\omega, i}(\xi)| |f(\xi)| d(\xi) \\ &\leq c \sum_{k \in K} \text{vol}(\gamma_k) \|f\|_{L^\infty(\gamma_k)} \\ &\leq ch_r^d \sum_{k \in K} \|f\|_{L^\infty(\gamma_k)}. \end{aligned}$$

Für den Einheitsquader  $Q$  gibt es nach dem Sobolevschen Einbettungssatz eine Konstante  $c$ , so dass

$$\|f\|_{L^\infty(Q)} \leq c(\|f\|_{L^p(Q)} + |f|_{W_p^\nu(Q)})$$

gilt. Diese Abschätzung wird auf eine Teilzelle reskaliert. Da die Seiten von  $\gamma_k$  nach oben durch  $h_r$  und nach unten durch  $h_r/\rho$  beschränkt sind, gibt es eine Konstante  $c$ , so dass für alle  $k \in K$

$$\|f\|_{L^\infty(\gamma_k)} \leq ch_r^{-d/p} (\|f\|_{L^p(\gamma_k)} + h_r^\nu |f|_{W_p^\nu(\gamma_k)})$$

gilt. Nach der Hölder-Ungleichung auf  $\mathbb{R}^{\#K}$  gilt  $\|\cdot\|_1 \leq (\#K)^{1-1/p} \|\cdot\|_p$ . Es gibt in  $\omega$  nur beschränkt viele Teilzellen, das heißt, es gibt eine Konstante  $c$ , so dass  $\#K \leq cr^d$ . Zusammen ergibt sich

$$\begin{aligned} |\check{F}_i| &= ch_r^{d-d/p} r^{d-d/p} \left( \left( \sum_{k \in K} \|f\|_{L^p(\gamma_k)}^p \right)^{1/p} + h_r^\nu \left( \sum_{k \in K} |f|_{W_p^\nu(\gamma_k)}^p \right)^{1/p} \right) \\ &\leq ch^{d-d/p} \left( \|f\|_{L^p(\omega)} + h^\nu |f|_{W_p^\nu(\omega)} \right). \end{aligned}$$

Daraus folgt

$$\|\check{a}_\omega\|_p \leq \left\| \check{G}^{-1} \right\|_p \left\| \check{F} \right\|_p \leq ch^{-d/p} (\|f\|_{L^p(\omega)} + h^\nu |f|_{W_p^\nu(\omega)})$$

und schließlich

$$\begin{aligned} \left\| \check{P}f \right\|_{L^p(\Gamma')} &\leq \left\| \check{a}_\omega^\top B_\omega \right\|_{L^p(\Gamma')} \\ &\leq ch^{d/p} \|\check{a}_\omega\|_p \leq c(\|f\|_{L^p(\omega)} + h^\nu |f|_{W_p^\nu(\omega)}). \end{aligned}$$

□

**Korollar 3.2.3** Sei  $\check{P}_\Omega$  die oben definierte eb-Spline Zwei-Schritt-Methode. Unter den Voraussetzungen von Satz 3.2.1 bzw. 3.2.2, gibt es eine Konstante  $c$ , so dass

$$|\check{P}f - f|_{W_p^m(\Omega)} \leq ch^{\nu-m} |f|_{W_p^\nu(\Omega)}, \quad m \leq \nu \leq n, \quad (3.5)$$

für jede Funktion  $f \in W_p^\nu(\Omega)$  gilt.

### 3.2.2. Fehler der globalen Methode

Die Bezeichnungen seien analog zu denen aus Abschnitt 3.2.1 gewählt. Es sei

$$\check{P}_\Omega : L^1(\omega) \ni f \mapsto a_\Omega^\top B_\Omega \in \mathcal{B}_\Omega^n$$

der globale Operator, wobei  $B_\Omega := (B_{\Omega,i})_{i \in I_\Omega}$  ein Spaltenvektor von B-Splines sei und der Vektor  $a_\Omega := (a_i)_{i \in I_\Omega}$  das Gramsche System  $\check{G}a_\Omega = \check{F}$  mit

$$\check{G}_{i,j} := \sum_{\xi \in \Xi} B_i(\xi) B_j(\xi) d(\xi), \quad \check{F}_i := \sum_{\xi \in \Xi} B_i(\xi) f(\xi) d(\xi), \quad i, j \in I_\omega.$$

löse.

Wir beschränken uns wieder auf den Fall  $p = 2$ :

**Satz 3.2.4** Es sei  $\nu > d/p$  und die relative Datendichte  $r$  sei ausreichend groß.  $\check{P}_\Omega$  ist eine splinereproduzierende,  $(2, \nu, \Omega)$ -stabile Methode.

*Beweis:* Die Reproduktionseigenschaft folgt aus der Definition. Der Rest des Beweises verläuft weitgehend analog zu denen von Satz 3.2.1 und 3.2.2. Zu beachten ist jedoch jeweils die Lokalität der Träger der einzelnen erweiterten B-Splines nach (1.3). Es sei

$$L_{i,j} := \{l \in \mathbb{Z}^d : \gamma_l \cap S_{\Omega,i} \cap S_{\Omega,j} \cap \Xi \neq \emptyset\}, \quad i, j \in I_\Omega,$$

die Indexmenge der im Schnitt zweier Träger relevanten Teilzellen. Analog definieren wir

$$L_i := \{l \in \mathbb{Z}^d : \gamma_l \cap S_{\Omega,i} \cap \Xi \neq \emptyset\}, \quad i \in I_\Omega.$$

Desweiteren sei

$$U_i = \bigcup_{l \in L_i} \gamma_l,$$

es gilt  $U_i \supset S_{\Omega,i}$ ,  $\text{diam}(U_i) \leq c \text{diam}(S_{\Omega,i}) \leq ch$  und  $\text{vol}(U_i) \leq c \text{vol}(S_{\Omega,i}) \leq ch^d$ .

Wie in den vorhergehenden Beweisen gilt

$$\left| \bar{G}_{i,j} - \check{G}_{i,j} \right| \leq c \frac{h_r}{h} \sum_{l \in L_{i,j}} \int_{\gamma_l} 1 \leq c \frac{\text{vol}(S_{\Omega,i} \cap S_{\Omega,j}) + ch_r^d}{r} \leq c \frac{h^d}{r}.$$

Analog zum Beweis von Satz 3.2.1 folgt  $\|\check{G}\|_2 \leq ch^{-d}$ .



Es gilt

$$\left| \check{F}_i \right| \leq c \sum_{l \in L_i} \text{vol}(\gamma_l) \|f\|_{L^\infty(\gamma_l \cap \Omega)} \leq ch^d \|f\|_{L^\infty(U_i)}.$$

Nach dem Sobolevschen Einbettungssatz und wegen der Beschränktheit des Durchmessers von  $U_i$  folgt

$$\|f\|_{L^\infty(U_i)} \leq ch^{-d/2} \left( \|f\|_{L^2(U_i)} + h^\nu |f|_{W_2^\nu(U_i)} \right).$$

Damit erhalten wir

$$\left| \check{F}_i \right| \leq ch^{d/2} \left( \|f\|_{L^2(U_i)} + h^\nu |f|_{W_2^\nu(U_i)} \right).$$

Daraus ergibt sich

$$\begin{aligned} \|\check{F}\|_2^2 &= (ch^{d/2})^2 \sum_{i \in I_\Omega} \left( \|f\|_{L^2(U_i)} + h^\nu |f|_{W_2^\nu(U_i)} \right)^2 \\ &\leq (ch^{d/2})^2 \sum_{i \in I_\Omega} 3 \left( \|f\|_{L^2(U_i)}^2 + h^{2\nu} |f|_{W_2^\nu(U_i)}^2 \right) \\ &\leq (ch^{d/2})^2 \left( \|f\|_{L^2(\Omega)}^2 + h^{2\nu} |f|_{W_2^\nu(\Omega)}^2 \right) \\ &\leq (ch^{d/2})^2 \left( \|f\|_{L^2(\Omega)} + h^\nu |f|_{W_2^\nu(\Omega)} \right)^2, \end{aligned}$$

wobei die zweite Umformung deswegen möglich ist, weil jeder Punkt in  $\Omega$  nur in endlich vielen  $U_i$  enthalten ist. Somit gilt

$$\|\check{F}\|_2 \leq ch^{d/2} \left( \|f\|_{L^2(\Omega)} + h^\nu |f|_{W_2^\nu(\Omega)} \right).$$

Wieder erhalten wir

$$\|\check{a}_\Omega\|_2 \leq \|\check{G}^{-1}\|_2 \|\check{F}\|_2 \leq ch^{-d/2} \left( \|f\|_{L^2(\Omega)} + h^\nu |f|_{W_2^\nu(\Omega)} \right)$$

und somit

$$\begin{aligned} \|\check{\mathcal{P}}_\Omega f\|_{L^2(\Omega)} &\leq \|\check{a}_\Omega^\top B_\Omega\|_{L^2(\Omega)} \leq ch^{d/2} h^{-d/2} \left( \|f\|_{L^2(\Omega)} + h^\nu |f|_{W_2^\nu(\Omega)} \right) \\ &= c \left( \|f\|_{L^2(\Omega)} + h^\nu |f|_{W_2^\nu(\Omega)} \right). \end{aligned}$$

Analog zum Beweis von Satz 2.3.3 ergibt sich daraus

$$\sup_{f \in W_2^\nu(\Omega)} \left\| \left( \|\check{\mathcal{P}}_\Omega f\|_{L^2(\Gamma'_i)} \right)_{i \in I_\Omega} \right\|_2 \leq c \left( \|f\|_{L^2(\Omega)} + h^\nu |f|_{W_2^\nu(\Omega)} \right).$$

□

Nach Satz 2.3.2 gilt folglich:

**Korollar 3.2.5** *Es sei  $\nu > d/p$  und die relative Datendichte  $r$  sei ausreichend groß. Zur globalen Approximation  $\check{\mathcal{P}}_\Omega$  gibt es eine Konstante  $c$ , so dass*

$$|\check{\mathcal{P}}_\Omega f - f|_{W_2^m(\Omega)} \leq ch^{\nu-m} |f|_{W_2^\nu(\Omega)}, \quad m \leq \nu \leq n, \quad (3.6)$$

für jede Funktion  $f \in W_2^\nu(\Omega)$  gilt.

Betrachten wir erneut das Beispiel aus Abschnitt 3.1.2: Wir verwenden die Methode der gewichteten Fehlerquadrate, um gestreute Daten zu approximieren. Abbildung 3.2 zeigt auf der linken Seite die Datenpunkte und rechts einen Teil des bilinearen Approximanten. Wie erwartet, ist hier kein negativer Einfluss der dichten Daten entlang der Schnittkurve zu bemerken.

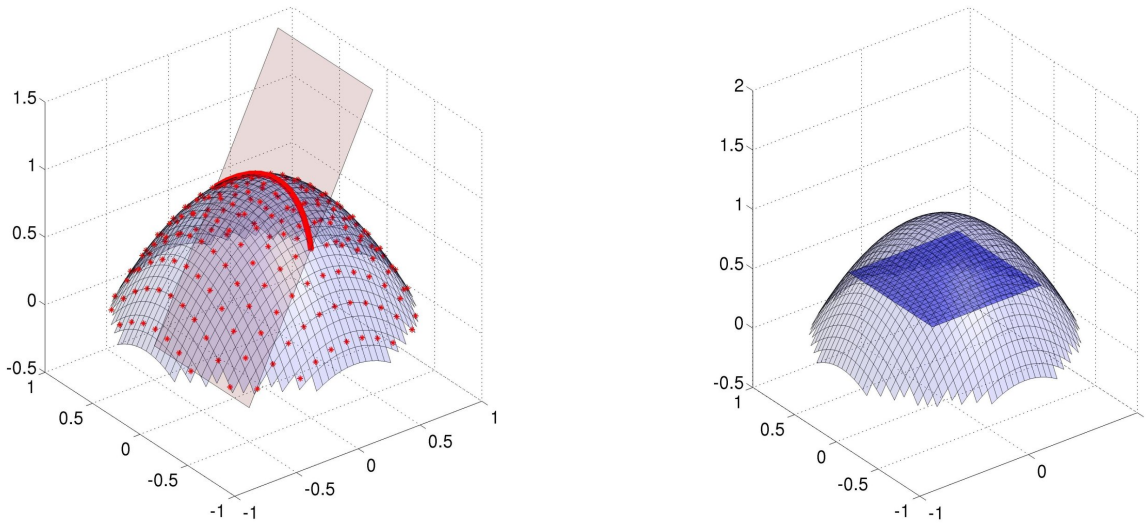


Abbildung 3.2.: lineare Approximation von  $f(x,y) = 1 - x^2 - y^2$  auf  $(-1/2, 1/2)^2$

Dieses gewichtete Verfahren weist Ähnlichkeiten mit sogenannten *data thinning* Methoden auf. Diese dünnen die Daten aus, bis die Daten gleichmäßig verteilt sind. Betrachten wir die Teilzellen  $\gamma_l$ . Man kann mit den hier verwendeten Argumenten den Fehler eines Algorithmus untersuchen, der solange ausdünnst, bis nur noch ein Datenpunkt pro Teilzelle vorhanden ist. Das Gewichten ist dann nicht mehr notwendig, da alle Punkte das gleiche Gewicht haben.

### 3.3. Numerische Resultate

An einem einfachen Beispiel wird die empirische Konvergenzrate der in Abschnitt 3.1 eingeführten Zwei-Schritt-Methode untersucht. Zuerst werden dichte, durch ein starkes

Rauschen verschobene Gitterdaten verwendet und in einem zweiten Experiment zufällig gewählte Datenpunkte, welche nicht auf dem kompletten Gebiet dicht sind und eine Anpassung des lokalen Algorithmus erfordern. Die Datenpunkte sind in beiden Experimenten recht gleichmäßig verteilt. Dies berechtigt dazu, die einfache Least Squares Methode zu verwenden, bei der die Datenpunkte nicht gewichtet werden. Die Ergebnisse der in Abschnitt 3.2 vorgestellten Methode würden sich qualitativ nicht von den hier präsentierten unterscheiden.

In beiden Experimenten ist die Grundkonstellation identisch:

- Das Approximationsgebiet ist ein Kreissektor vom Radius 4, mit Winkel  $4/3 \pi$  und Mittelpunkt im Ursprung (siehe Abbildung 3.3(a)).
- Die Datenwerte stammen von der glatten Funktion  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x,y) = \sin(x) \sin(y)$  (siehe Abbildung 3.3(b)).
- Die Anzahl der Datenpunkte ist proportional zur Anzahl der Gitterzellen bzw. den Freiheitsgraden der eb-Splines, das heißt zu  $\sim 1/h^2$ .
- Gemessen wird der Fehler der Approximation auf einem feineren Gitter der Gitterweite  $h_{\text{ref}}$ , welches das komplette Approximationsgebiet überdeckt.
- Die Gitterweite  $h$  des Splinegitters wird variiert, um die experimentelle Konvergenzrate zu erhalten.
- Für jede der entstehenden Datenpunkt-Gitterweite-Konstellationen wurden verschiedene Approximationsalgorithmen miteinander verglichen. Ein globales Least Squares Verfahren mit Standard-B-Splines, ein globales Least Squares Verfahren mit eb-Splines und verschiedene Zwei-Schritt-Methoden mit eb-Splines.

### 3.3.1. Dichte Daten

Um mit geringer Datenpunktanzahl eine möglichst große Datenpunktdichte zu bekommen, werden in diesem Fall erneut veränderte Gitterdaten verwendet. Ein um  $(h/4, h/4)$  gegenüber dem Splinegitter verschobenes Gitter der Gitterweite  $h/2$  wird in zufälligem, gleichverteiltem Maße in beide Koordinatenrichtungen gestört, um die Datenpunkte zu erzeugen. Die Verschiebung beträgt jeweils höchstens  $h/4$ , es befinden sich also 4 Datenpunkte in jeder Gitterzelle des Splinegitters und die Füllidistanz beträgt höchstens  $h/2$ . Die getesteten Gitterweiten sind 2, 1,  $1/2$ ,  $1/4$ ,  $1/8$ ,  $1/16$ ,  $1/32$  und  $1/64$ .

Neben den globalen Approximationen wird eine Zwei-Schritt-Methode getestet: Für jedes  $i \in I_\Omega$  wird ein Least Squares Fit  $s_i := \sum_{i \in I_{\Omega_i}} c_i B_i$  auf dem lokalen Gebiet

$$\Omega_i := \Omega \cap [t_{i_1-n-1}^1, t_{i_1+2n+2}^1] \times \cdots \times [t_{i_d-n-1}^d, t_{i_d+2n+2}^d]$$

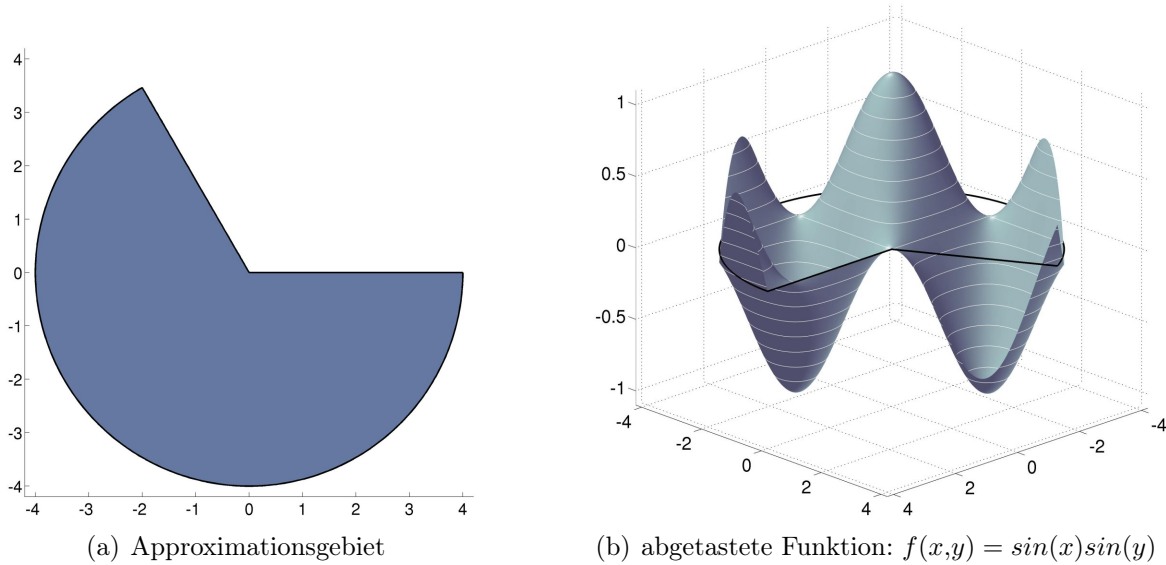


Abbildung 3.3.: Beispiel

im erweiterten Spliner Raum  $\mathcal{B}_{\Omega_i}^n$  berechnet. Die Projektion in den erweiterten Spliner Raum  $\mathcal{B}_{\Omega}^n$  ist in diesem Fall sehr einfach berechnet, da  $b_i$  in beiden Räumen ein innerer Spline ist. Somit kann der Koeffizient  $c_i$  in die globale Approximation  $s := \sum_{i \in I_{\Omega}} c_i B_i$  übernommen werden.

Abbildung 3.4(a) zeigt die Datenpunktkonstellation und das Gitter für  $h = 1/2$ . Den Fehler des Ergebnisses der bikubischen eb-Spline Zwei-Schritt-Methode stellt Abbildung 3.4(b) dar.

In Tabelle 3.1 werden die Ergebnisse für die Splineräume der Ordnung  $n = 3$  und  $n = 4$  zusammengefasst.

Die Gitterweite des zur Messung des Fehler der Approximationen verwendeten Gitters ist  $h_{\text{ref}} = 1/100$ . Aufgelistet sind der maximale und der mittlere Fehler an diesen Punkten. Die verschiedenen Methoden werden bei variierenden Gitterweiten verglichen. Außerdem sind die Kondition der Matrix der Normalengleichung, die Anzahl der Freiheitsgrade in dem zur Approximation verwendeten Spliner Raum  $\mathcal{B}_{\Omega}^n$  und die Referenzwerte der erwarteten Fehlergrößenordnung  $h^n$  aufgelistet.

Betrachten wir zunächst die Resultate des globalen LSF mit Standard-B-Splines an. Das zu lösende Gleichungssystem ist durchgängig schlecht konditioniert. Wie bereits erläutert, liegt das an den Splines, die nur wenige Datenpunkte in ihrem Träger aufweisen. Dies ist kein rein numerisches, sondern ein den Ansatz innewohnendes Problem. Die gemessenen Fehler sind entsprechend sehr groß. Wie erwartet, werden diese am Gebietsrand gemessen. Es handelt sich also um Formartefakte, die immer dann auftreten, wenn das Gebiet nicht rechteckig ist. Die experimentellen Konvergenzraten beider eb-Spline-Algorithmen sind von Ordnung  $\mathcal{O}(h^n)$ . Die Unterschiede der gemessenen Fehler

<b>n = 3 :</b>	$h$	Mittlerer Fehler					Kondition Matrix	
		global LSF B-Splines	global LSF eb-Splines	ERC	Zwei-Schritt eb-Splines	ERC	global LSF B-Splines	global LSF eb-Splines
	2	2.05E+02	1.49E+00		1.49E+00		2.10E+27	7.36E+05
	1	4.87E-02	8.18E-03	182	8.14E-03	183	2.03E+22	3.03E+02
	1/2	9.39E+11	7.80E-04	10	7.84E-04	10	1.11E+22	3.13E+03
	1/4	7.81E-05	7.45E-05	10	7.49E-05	10	1.38E+13	2.56E+03
	1/8	4.44E-04	7.56E-06	10	7.57E-06	10	8.83E+20	3.12E+03
	1/16	2.92E-06	9.10E-07	8	9.11E-07	8	5.75E+16	3.28E+03
	1/32	2.64E+09	1.11E-07	8	1.11E-07	8	2.77E+32	5.11E+03
	1/64		1.37E-08	8	1.37E-08	8		
	$h$	Maximaler Fehler					Referenz- werte $h^3/4$	Freiheits- gerade eb-Splines
		global LSF B-Splines	global LSF eb-Splines	ERC	Zwei-Schritt eb-Splines	ERC		
	2	4.30E+03	1.58E+01		1.58E+01		2.00E+00	1.40E+01
	1	2.57E+01	2.46E-01	64	2.46E-01	64	2.50E-01	4.90E+01
	1/2	9.82E+14	1.88E-02	13	1.89E-02	13	3.13E-02	1.66E+02
	1/4	3.37E-02	5.11E-03	4	5.12E-03	4	3.91E-03	5.99E+02
	1/8	7.12E+00	2.62E-04	19	2.62E-04	20	4.88E-04	2.29E+03
	1/16	2.23E-01	8.79E-05	3	8.81E-05	3	6.10E-05	8.85E+03
	1/32	6.70E+14	6.59E-06	13	6.58E-06	13	7.63E-06	3.49E+04
	1/64		2.85E-07	23	2.85E-07	23	9.54E-07	1.38E+05

<b>n = 4 :</b>	$h$	Mittlerer Fehler					Kondition Matrix	
		global LSF B-Splines	global LSF eb-Splines	ERC	Zwei-Schritt eb-Splines	ERC	global LSF B-Splines	global LSF eb-Splines
	2	3.02E+08	1.06E-01		1.06E-01		9.54E+26	1.13E+06
	1	1.80E+08	2.18E-03	48	2.20E-03	48	5.85E+28	1.23E+06
	1/2	9.86E+11	3.71E-05	58	3.78E-05	58	6.05E+28	3.39E+05
	1/4	6.64E-01	1.85E-06	20	1.88E-06	20	3.98E+16	1.62E+05
	1/18	5.03E+07	1.08E-07	17	1.08E-07	17	1.38E+24	5.33E+05
	1/16	5.89E-07	6.47E-09	16	6.50E-09	17	1.53E+31	2.93E+05
	1/32	1.70E-08	3.94E-10	16	3.95E-10	16	7.23E+37	2.12E+06
	1/64		2.44E-11	16	2.45E-11	16		
	$h$	Maximaler Fehler					Referenz- werte $h^4/10$	Freiheits- gerade eb-Splines
		global LSF B-Splines	global LSF eb-Splines	ERC	Zwei-Schritt eb-Splines	ERC		
	2	1.45E+11	2.23E+00		2.23E+00		1.60E+00	2.30E+01
	1	1.44E+11	1.22E-01	18	1.24E-01	17	1.00E-01	6.70E+01
	1/2	1.24E+15	1.43E-03	85	1.46E-03	84	6.25E-03	1.99E+02
	1/4	5.47E+03	5.77E-05	24	5.86E-05	24	3.91E-04	6.63E+02
	1/8	5.03E+12	3.18E-06	18	3.11E-06	18	2.44E-05	2.41E+03
	1/16	4.60E-02	6.39E-07	5	6.41E-07	5	1.53E-06	9.10E+03
	1/32	1.96E-03	1.27E-08	50	1.31E-08	49	9.54E-08	3.54E+04
	1/64		7.18E-10	17	7.17E-10	18	5.96E-09	1.39E+05

Tabelle 3.1.: Ergebnisse zum Experiment mit dichten Daten

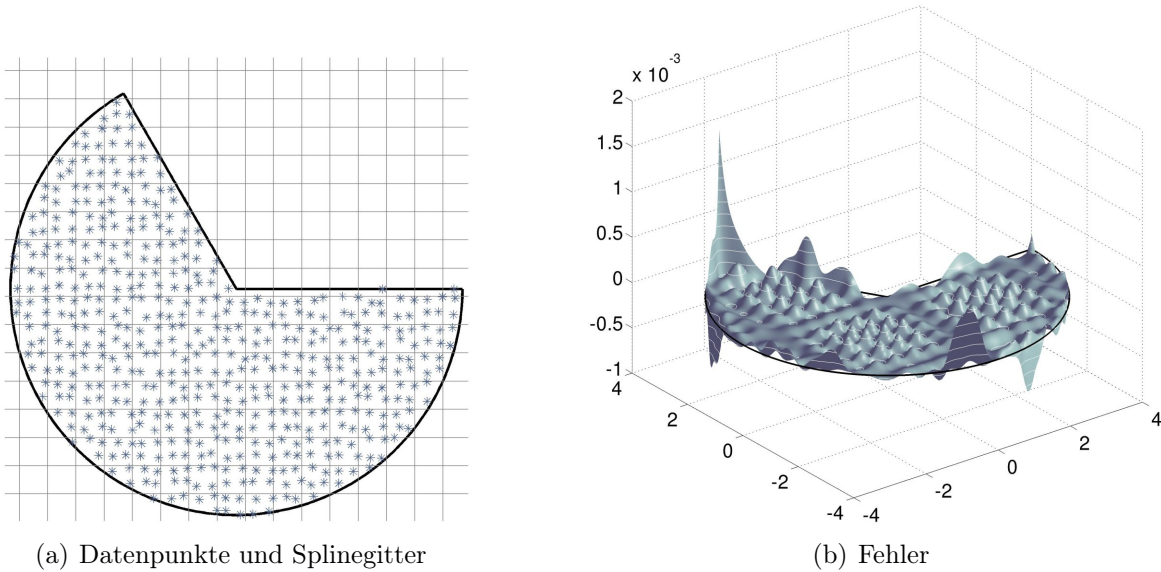


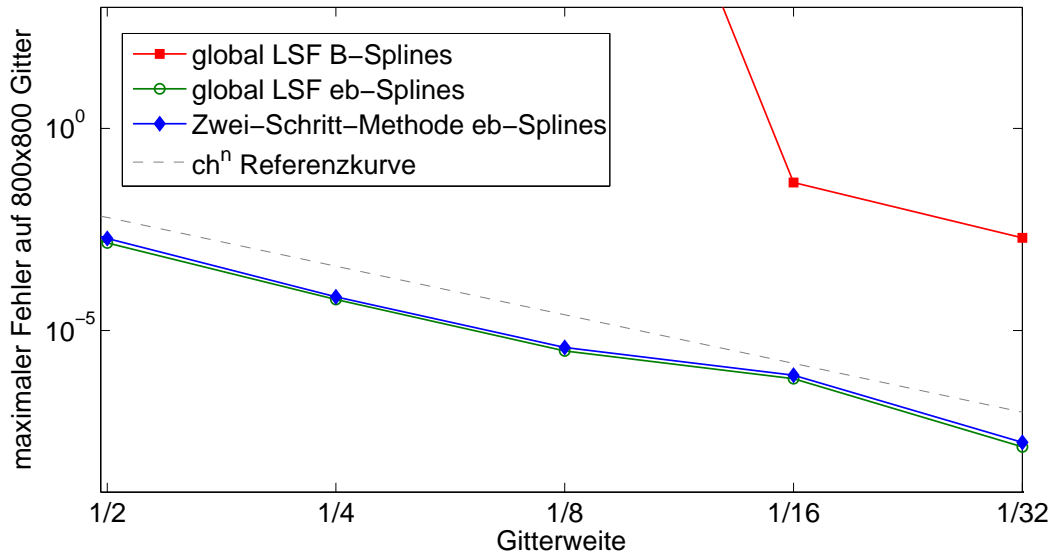
Abbildung 3.4.: Konfiguration und Ergebnis für  $h = 1/2$  und  $n = 4$

sind äußerst gering, wie auch der bilogarithmische Plot 3.5 zeigt, in dem man die fast deckungsgleichen Kurven kaum unterscheiden kann. Auch ist das globale Gleichungssystem stets gut konditioniert. Der mittlere Fehler ist stets noch eine Zehnerpotenz kleiner als der maximale, was daran liegt, dass im Inneren die Fehler kleiner sind als am Rand. Die Anzahl der Freiheitsgrade ist antiproportional zu  $h^d$ . Sie ist damit nicht von der Datenpunktanzahl und insbesondere für feine Daten auch nicht von  $n$  abhängig. Beides ist ein großer Vorteil gegenüber den gebräuchlichen Radiale Basis-Verfahren. Diese Effizienz ist ein besonderer Vorteil der Tensorprodukt-B-Splines.

Bei der Zwei-Schritt-Methode kommen noch zwei wesentliche Vorteile hinzu: Der erste folgt aus der Lokalität der Splines. Interessiert einen die Approximation lediglich in einem bestimmten Teilgebiet, so muss man nur die Koeffizienten der Splines berechnen, die auf diesem definiert sind. Auch wenn man bei sehr feinen Gittern nicht global approximieren kann oder sogar schon das Speichern aller Koeffizienten unmöglich ist, kommt man auf diese Weise den approximierenden eb-Spline immer dort berechnen, wo man ihn braucht. Außerdem ist der Algorithmus sehr leicht zu parallelisieren, da die einzelnen lokalen Approximationen unabhängig voneinander sind.

#### 3.3.2. Dünnere Daten

Im zweiten Experiment werden zufällig verteilte Datenpunkte verwendet. Die Datenpunktanzahl ist proportional zur Anzahl der Freiheitsgrade im verwendeten erweiterten Spliner Raum  $\mathcal{B}_\Omega^n$ . Es werden drei Datenpunkte pro Freiheitsgrad verwendet. Zwar sind die Daten damit noch immer recht dicht, aber nicht mehr so gleichmäßig verteilt wie

Abbildung 3.5.: Vergleich der drei Approximationsverfahren ( $n = 4$ )

im zuvor beschriebenen Experiment. Die in den theoretischen Resultaten geforderten Datendichten sind damit auf keinen Fall mehr gewährleistet.

Ein mögliche Ursache für Instabilitäten liegt darin, dass im Träger eines erweiterten Splines keine Datenpunkte oder nur einzelne Datenpunkte liegen. Besonders wahrscheinlich ist das Auftreten dieses Problems bei der im vorigen Abschnitt beschriebenen Zwei-Schritt-Methode, da in den lokalen Splineräumen  $\mathcal{B}_{\Omega_i}^n$  viele innerer B-Splines vorkommen, deren Träger genau eine Zelle mit  $\Omega_i$  gemein haben. Potentiell reicht es schon, wenn bei einer Zelle des Gitters die Datenpunkte schlecht - das heißt nur in der Nähe des Trägerrands - liegen. Dies führt zu schlecht konditionierten lokalen Gleichungssystemen und damit auch zu größeren Fehlern. Abbildung 3.6 zeigt den maximalen Fehler auf einem  $100 \times 100$  Gitter. Auf der Abszisse sind die getesteten Gitterweiten zu erkennen. Verglichen werden die beiden eb-Splinemethoden. Schon für  $h = 1/8$  treten bei der Zwei-Schritt-Methode große Fehler auf, die auf schlecht konditionierte Gleichungssysteme bei einzelnen lokalen Approximationen zurückzuführen ist. Der globale LSF ist hingegen stabil, die Träger aller Splines haben einen „großen“ Schnitt mit  $\Omega$  und deswegen mit hoher Wahrscheinlichkeit auch mehrere Datenpunkte in ihrem Inneren. Um das Zwei-Schritt-Verfahren zu verbessern, werden zwei Modifikationen der lokalen Approximation getestet:

Die erste Heuristik ist ein einfacher iterativer Prozess. Erst wird bezüglich  $\Omega_i$  angekoppelt und das Normalengleichungssystem wird aufgestellt. Dann wird die Kondition der Matrix berechnet und falls diese eine Toleranz ( $10^{18}$ ) überschreitet, wird  $\Omega_i$  um einen Ring von Gitterzellen vergrößert. Dies geschieht solange, bis entweder die Toleranz

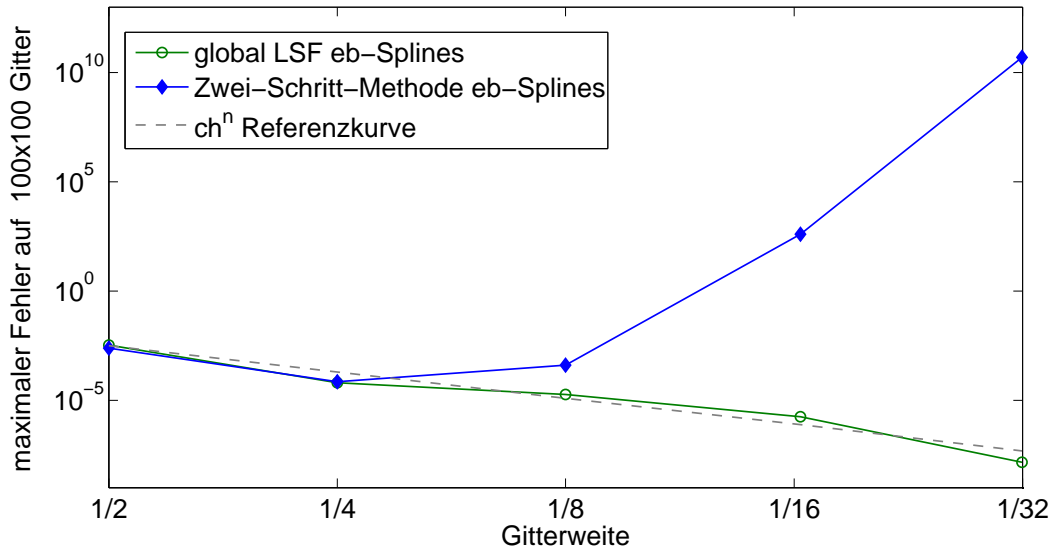


Abbildung 3.6.: Vergleich von zwei eb-Spline Approximationsverfahren ( $n = 4$ )

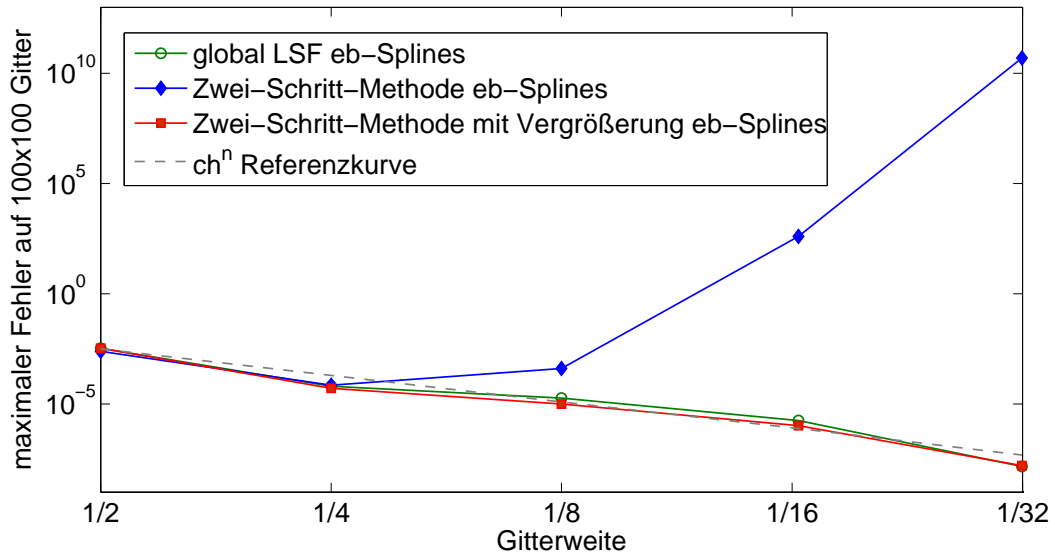
unterschritten oder eine maximale Anzahl von Ankopplungen erreicht ist.

Ein anderer getesteter Ansatz beruht auf erneutem Ankoppeln, wobei diesmal nicht die Gebietsränder, sondern die Position der Datenpunkte darüber entscheidet, ob ein Spline anzukoppeln ist. Dieser Heuristik liegt die Annahme zugrunde, dass gerade die Splines „instabil“ sind, in deren Träger wenige am Rand positionierte Datenpunkte liegen. Identifiziert werden sie über die kleinsten Diagonalelemente  $G_{kk} = \sum_{\xi \in \Xi} (B_k(\xi))^2$  der Gramschen Matrix. Die Ankopplung verläuft erneut iterativ: Das Gleichungssystem wird aufgestellt. Falls die Toleranz überschritten wird, werden die kleinsten Diagonalelemente ausgewählt. Alle Zellen in den Trägern der entsprechenden B-Splines werden daraufhin - mit Ausnahme von  $\Gamma'_i$  - wie äußere behandelt. Dies führt dazu, dass eine größere Menge von B-Splines angekoppelt wird. Mit der neuen Basis beginnt die Prozedur erneut.

Beide Heuristiken führen zu vergleichbaren Ergebnissen. In Abbildung 3.7 werden die Ergebnisse der iterativen Vergrößerung der lokalen Gebiete mit der einfachen Zwei-Schritt-Methode und dem globalem LSF verglichen. Es wird sichtbar, dass diese einfachen Modifikationen schon zu einer deutlichen Verbesserung des Zwei-Schritt-Ansatzes führen.

Für das gegebene Beispiel ist diese Methode also durchaus effizient. Für noch dünnere Daten scheint diese Heuristik jedoch ungeeignet: Einerseits ist die iterative Prozedur zeitaufwändig, da in jedem Schritt das Gleichungssystem aufgestellt und die Kondition berechnet werden muss. Andererseits ist nicht garantiert, dass nach dem Hinzufügen einer endlichen Anzahl an Ringen gut konditionierte lokale Gleichungssysteme entste-



Abbildung 3.7.: Vergleich von drei eb-Spline Approximationsverfahren ( $n = 4$ )

hen. Das Gleiche gilt für die datenpunktabhängige Ankopplung. Neben dem großen Zeitaufwand führt das lokale Ankoppeln im Extremfall zu einer sehr geringen Anzahl an verbleibende Freiheitsgraden und damit zu einem Verlust an Approximationskraft, der sich nicht in der Approximationsordnung, jedoch in den Konstanten niederschlägt. Für Anwendungen mit dünnen, stark ungleichmäßig über das Gebiet verteilten Daten müssen bessere Lösungen gefunden werden. Es wird darauf verzichtet, weitere Experimente in diese Richtung durchzuführen, da die in der angestrebten Anwendung auftretenden Daten gleichmäßig und dicht verteilt sind. Trotzdem an dieser Stelle ein paar kurze Bemerkungen zum möglichen Umgang mit dünnen Daten:

Das Schlüsselwort hier ist Adaptivität, das heißt, es müssen verschiedene Gitterweiten verwendet werden, je nachdem, wie dicht die Daten liegen. Eine Möglichkeit, adaptiv zu approximieren, ist es, den kompletten Splineraum hierarchisch aufzubauen. Das heißt, in Gebieten mit hoher Datendichte werden feine Gitter verwendet, auf dem Rest gröbere. Die Gitter werden entsprechend geschachtelt, siehe Abbildung 3.8(a). Ein Verfahren mit diesen so genannten hierarchischen Splines wird in [29] vorgestellt, ist dort jedoch auf Standard-Tensorprodukt-B-Splines beschränkt. Ein solches Vorgehen ist auch mit erweiterten Splines möglich, die Implementierung jedoch bedarf großer Sorgfalt.

Eine weitere, sehr viel einfachere Methode bietet sich im Kontext der Zwei-Schritt-Methoden an: Man verwendet auf  $\Omega_i$  ein Splinegitter mit Gitterweite  $\tilde{h} > h$  und approximiert lokal in dem entsprechenden erweiterten Splineraum, siehe Abbildung 3.8(b). Die Reproduktion von Polynomen ist in diesem Fall weiterhin gewährleistet, ebenso die Stabilität; allerdings geht hier der Quotient der Gitterweiten  $h/\tilde{h}$  in die Appro-

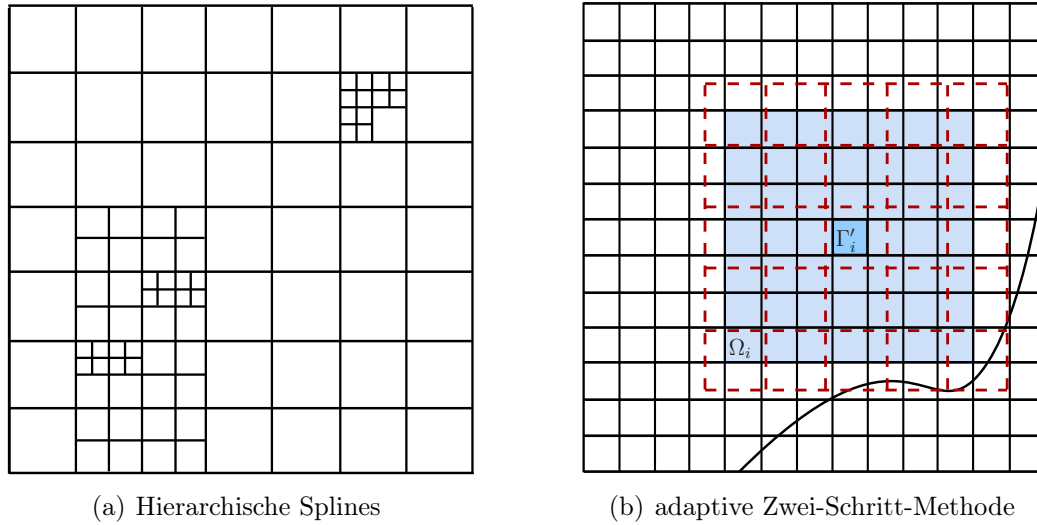


Abbildung 3.8.: Mögliche adaptive Ansätze

ximationskonstanten ein. Bei der Wahl von  $\tilde{h}$  muss lediglich gewährleistet sein, dass mindestens eine Zelle des groben Gitters komplett in  $\Omega_i$  liegt und dass diese die Zelle  $\Gamma'_i$  des feinen Gitters enthält. Durch den in 2.1.1 gegebenen Projektionsoperator erhält man die Koeffizienten zu den auf dem feinen Gitter beheimateten globalen Approximanten. Zwar arbeitet man global mit dem feinsten Gitter, die einzelnen lokalen Approximationen auf den gröberen Gittern zu berechnen ist jedoch wenig rechenintensiv.

## 4. Hole-Filling mit erweiterten B-Splines

Die in Kapitel 1 vorgestellten gewichteten erweiterten Splines eignen sich gut zum Lösen von Differentialgleichungen mittels der Finite-Elemente-Methode. Die Gewichtsfunktion garantiert dabei die Einhaltung der Nullrandbedingungen. Wie bereits beschrieben, ist die Konstruktion der Gewichtsfunktionen ein bisher nicht zufriedenstellend gelöstes Problem. Es ist ein schneller, effizienter Algorithmus gesucht, der es ermöglicht, auf beliebigen Gebieten solche Funktionen zu berechnen. Es geht also darum, für ein beliebiges Gebiet im  $\mathbb{R}^d$  eine skalarwertige Funktion zu finden, die auf dem Gebietsrand verschwindet und in einer Umgebung der Randes proportional zur Abstandsfunktion ist (siehe Definition 1.2.1). In diesem Kapitel wird ein neuer Ansatz zur Konstruktion von Gewichtsfunktionen vorgestellt.

Das sogenannte *Hole-Filling*-Problem verallgemeinert die Problemstellung über die Konstruktion von Gewichtsfunktionen hinaus:

Es sei  $\Psi \subset \mathbb{R}^2$  ein nicht notwendigerweise zusammenhängendes Gebiet, auf dem eine Funktion  $f : \Psi \rightarrow \mathbb{R}$  gegeben sei. Weiterhin sei  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$  – die zu füllende „Lücke“ – ein weiteres Gebiet, dessen Rand  $\partial\Omega$  eine Teilmenge des Randes  $\partial\Psi$  von  $\Psi$  ist. Abbildung 4.1 zeigt zwei mögliche Konstellationen für  $\Omega$  und  $\Psi$ .

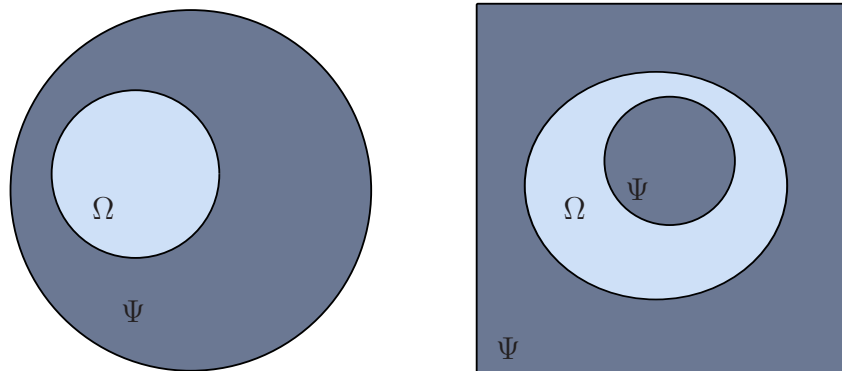


Abbildung 4.1.: Zwei mögliche Konstellationen des Gebiet  $\Psi$  und der Lücke  $\Omega$

Gesucht ist eine Funktion  $s : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ , so dass

$$f(x) = s(x), \quad x \in \partial\Omega.$$

Die Graphen von  $f$  und  $s$  sollen also eine stetige Fläche im  $\mathbb{R}^3$  bilden. Wir nennen den Graphen von  $s$  *Füllung*. Setzen wir  $f = 0$ , so entspricht dies der ursprünglichen Suche nach einer Gewichtsfunktion auf  $\Omega$ .

Zusätzlich kann eine höhere Stetigkeit der Übergänge gefordert werden. Eine Füllung heiße  $C^k$ -stetig, falls alle partiellen Ableitungen bis zur Ordnung  $k$  von  $f$  und  $s$  übereinstimmen, das heißt, falls

$$f^{(\alpha)}(x) = s^{(\alpha)}(x), \quad x \in \partial\Omega, \quad |\alpha| \leq k.$$

Hole-Filling-Probleme treten sowohl beim Design von Freiformflächen in CAD-Programmen als auch im Reverse-Engineering auf. Hier werden die von 3-D-Scannern erzeugten Punktwolken in einem mehrstufigen Prozess zu einer triangulierten Fläche verwandelt. Dabei müssen an den Stellen Lücken gefllt werden, an denen Daten vom Scanner fehlen. Beim Freiformflchendesign geht es vorwiegend darum, verschiedene Flächen möglichst glatt miteinander zu verbinden. Neben der optischen Glattheit der Objekte ist ihre *Wasserdichtigkeit* ein Kriterium für die Güte der Flächen, das heißt, die Flächen müssen stetig sein. In der Praxis sind Sprünge unterhalb der Fertigungstoleranzen jedoch irrelevant.

Es gibt eine Fülle von Algorithmen, die sich mit dem Hole-Filling beschäftigen, was als Beleg für die Bedeutung dieser Anwendung gesehen werden kann. Prinzipiell kann man die Methoden in zwei Kategorien unterteilen. Die einen verwenden Subdivisionsschemata [28, 41, 42, 37], die anderen arbeiten mit Triangulierungen. Letztere sind oft nur ein Baustein in einer Kette von Prozessen, die der Erzeugung eines Polygonnetzes aus einer 3-D-Punktwolke dienen [6]. Es werden Triangulierungen [47, 10, 9], selten aber auch Vierecksnetze verwendet [55]. Die Algorithmen setzen verschiedene Heuristiken zur Glättung der Flächen ein; am weitesten verbreitet ist die Minimierung der Willmore-Energie. Ursprung dieser Verfahren sind Methoden zur Rekonstruktion von 2-D-Bilddaten; hier ist die Minimierung der Variation weit verbreitet.

Die meisten dieser Schemata liefern bei genügend glatten Randdaten wasserdichte  $C^1$ -stetige Füllungen. Insbesondere bei den Subdivisionsschemata kommt es auf die Geometrie des zu fllenden Bereiches an. Eine  $N$ -seitige Lücke erzeugt einen nicht regulären Punkt im Inneren der Füllung. Für  $N \geq 3$  kann an diesem sowie an weiteren Eckpunkten die  $C^1$ -Stetigkeit nicht immer gewährleistet werden. Es gibt Subdivisionsschemata, die fast überall  $C^2$ -stetige Grenzflächen liefern. Je nach Randdaten ist jedoch auch hier der Randübergang nur approximativ.

Die in [47] vorgestellte Methode liefert im  $\mathbb{R}^2$  Füllungen, die im Inneren  $C^k$ -stetig sind. Es werden sogenannte Makro-Elemente verwendet. Allerdings ist es schwierig, Makro-Elemente hoher Glattheit zu konstruieren, so dass auch hier krmmungsstetige Füllungen im Vordergrund stehen. Darüber hinaus wird in jedem Schritt des Algorithmus die Triangulierten des Gebiets geändert und die Fehlerabschätzungen am Rand sind von der Größe der Dreiecke abhängig.

Wie zuvor sollen hier die Vorteile des einfachen erweiterten Splineraumes genutzt werden, um für beliebige Lücken  $\Omega$  eine Füllung zu berechnen. Die Glattheit im Inneren der Füllung stellt bei diesem Ansatz kein Problem dar, denn wir verwenden einen Ansatzraum von genügender Glätte. Auch wenn der Ansatz theoretisch wasserdichte Flächen liefert, können am Rand aufgrund der verwendeten numerischen Verfahren nur im approximativen Sinn  $C^k$ -stetige Übergänge erwartet werden. Diese sind wiederum auch für  $k \geq 2$  einfach zu erreichen. Dies ist ein Vorteil gegenüber den meisten bekannten Verfahren. Im ersten Abschnitt beschäftigen wir uns mit einem zweistufigen Algorithmus, der es ermöglicht  $C^0$ -stetige Füllungen zu erzeugen. Die Gewichtsfunktion dient dabei als Anwendungsbeispiel. Die Restriktion auf das Zweidimensionale bleibt auch im zweiten Abschnitt bestehen. Dort geht es um einen Ansatz, der es ermöglicht, in einem iterativen Prozess  $C^k$ -stetige Füllungen zu finden. Dessen Leistungsfähigkeit demonstrieren verschiedene Beispielflächen. Die weiteren Ausführungen erläutern, wie die Füllung zusätzlich geglättet werden kann. Die vorgestellten Methoden können ebenso im  $\mathbb{R}^d$  angewendet werden, um Funktionen zu finden, die entlang einer  $(d-1)$ -dimensionalen Mannigfaltigkeit verschwinden oder glatt an eine gegebene Funktion anschließen.

## 4.1. Randstetige Füllung

### 4.1.1. Ansatz

Die Idee, die diesem Algorithmus zu Grunde liegt, ist bestechend einfach. Man betrachte das Poisson-Problem

$$-\Delta s = 0 \text{ auf } \Omega \text{ und } s = f \text{ auf } \partial\Omega. \quad (4.1)$$

Jede Lösung  $u$  dieser Gleichung erfüllt die erläuterten Ansprüche an die Randstetigkeit. Sie kann als Füllung verwendet werden. Zur Berechnung der Gewichtsfunktion verwendet man stattdessen

$$-\Delta s = 1 \text{ auf } \Omega \text{ und } s = 0 \text{ auf } \partial\Omega. \quad (4.2)$$

Wir werden allerdings nur eine approximative numerische Lösung verwenden. Dies ist zulässig, solange sie genau genug ist, um die Wasserdichtigkeit im Sinne der Fertigungstoleranz zu garantieren.

Auf den ersten Blick scheint es – insbesondere was die Gewichtsfunktion angeht – so, als würde man durch diesen Ansatz das ursprüngliche Problem, das Lösen einer Differentialgleichung mit Dirichlet-Randbedingungen, durch das nicht minder schwere Lösen von (4.1) ersetzen. Dies ist jedoch nicht der Fall, da die Ansprüche an die Genauigkeit der Lösung nicht vergleichbar sind. Es ist insbesondere im Inneren des Gebietes keinesfalls erforderlich, dass  $-\Delta s = 1$  gilt. Abweichungen von mehreren 100 Prozent stellen

kein Problem dar. Im Falle der Gewichtsfunktion kommt hinzu, dass diese nur einmal berechnet werden muss. Es denkbar, dass die Gewichtsfunktion in einem feineren Splineraum berechnet wird als die Lösung der ursprünglichen Differentialgleichung.

Um eine approximative Lösung zu finden, benutzen wir eine zweistufige Methode: In einem ersten Schritt wird auf einem regelmäßigen Gitter mit Randmodifikationen mittels eines Differenzenverfahrens eine Lösung berechnet. Die somit erhaltenen gestreuten Daten werden mittels eines der in Kapitel 3 vorgestellten Verfahren mit einem eb-Spline approximiert. Damit bekommen wir eine skalarwertige Funktion  $s$  auf  $\Omega$ .

Alternativ wäre es möglich, andere gestreute Daten zu verwenden. Man könnte zum Beispiel, wie in [46] geschehen, in einer dichten Punktmenge in der Umgebung des Randes die Abstandsfunktion vom Rand berechnen und die so erhaltenen Punkte approximieren.

Ein großer Vorteil des hier gewählten Ansatzes liegt darin, dass sich die Lösungen des Problems (4.1) und der Poisson-Gleichung mit allgemeiner rechten Seite und Dirichlet Randbedingungen sich in Spitzen von Gebieten ähnlich verhalten [54]. Dies hat den Vorteil, dass die Gewichtsfunktion der gesuchten Lösung bereits ähnlich ist. Wenn man nun die web-Spline Finite-Elemente-Methode verwendet, um Poisson-Gleichungen zu lösen, erhöht dies die Genauigkeit.

Da sowohl bei dem gewählten Differenzenverfahren als auch im gewählten Splineraum fast nur rechteckige Gitter verwendet werden, ist die Methode einfach im Vergleich zu anderen, die oft eine Triangulierungen des Gebiets voraussetzen. Bevor wir auf den kompletten Algorithmus eingehen, betrachten wir das verwendete Differenzenverfahren im Detail.

### 4.1.2. Shortley-Weller-Verfahren

Das hier beschriebene Shortley-Weller-Verfahren, welches von den Namensgebern in [53] vorgeschlagen wurde, erweitert die einfache „Fünfpunktformel“ für die Poisson-Gleichung auf Rechtecken zu einer Formel für beliebige Gebiete. Das Shortley-Weller-Verfahren ist ein Differenzenverfahren von zweiter Ordnung. Es wird gezeigt, dass die vorkommenden Diskretisierungsmatrizen nach einfacher diagonaler Vorkonditionierung gut konditioniert sind. Dies motiviert neben der einfachen Struktur den Einsatz dieses Verfahrens.

Betrachten wir zunächst die Diskretisierung des Gebietes  $\Omega$ :

Es wird ein uniformes Gitter der Gitterweite  $h$  über das Gebiet gelegt. Die Punkte des Gitters im Gebiet bezeichnet man als *innere* Gitterpunkte

$$\Omega_h := \{(x, y) \in \Omega \mid x = i \cdot h, y = j \cdot h \text{ mit } i, j \in \mathbb{N}\},$$

Hinzu kommen *Randpunkte*, die im Schnitt von Diskretisierungsgitter und  $\partial\Omega$  liegen. Dabei betrachten wir nur jene, die mindestens einen inneren Gitterpunkt  $(x, y)$  als

Nachbarn haben, also solche, für die eine der folgenden Gleichungen gilt:

$$(x - th, y) \in \partial\Omega \text{ mit } (x, y) \in \Omega_h, t \in (0, 1]; (x - \epsilon h, y) \in \Omega \text{ für alle } \epsilon \in [0, t) \quad (4.3)$$

$$(x + th, y) \in \partial\Omega \text{ mit } (x, y) \in \Omega_h, t \in (0, 1]; (x + \epsilon h, y) \in \Omega \text{ für alle } \epsilon \in [0, t) \quad (4.4)$$

$$(x, y - th) \in \partial\Omega \text{ mit } (x, y) \in \Omega_h, t \in (0, 1]; (x, y - \epsilon h) \in \Omega \text{ für alle } \epsilon \in [0, t) \quad (4.5)$$

$$(x, y + th) \in \partial\Omega \text{ mit } (x, y) \in \Omega_h, t \in (0, 1]; (x, y + \epsilon h) \in \Omega \text{ für alle } \epsilon \in [0, t) \quad (4.6)$$

Es sei

$$\Gamma_h := \{\text{Randpunkte, die eine der Bedingungen (4.3-4.6) erfüllen}\}$$

die Randpunktmenge. Diese enthält nicht notwendigerweise alle Schnittpunkte von Rand und Gitter. Innere Punkte werden, wie in Abbildung 4.2 dargestellt, als *randnah* respektive *randfern* bezeichnet, je nachdem ob sie einen Nachbarn in  $\Gamma_h$  besitzen oder nicht.

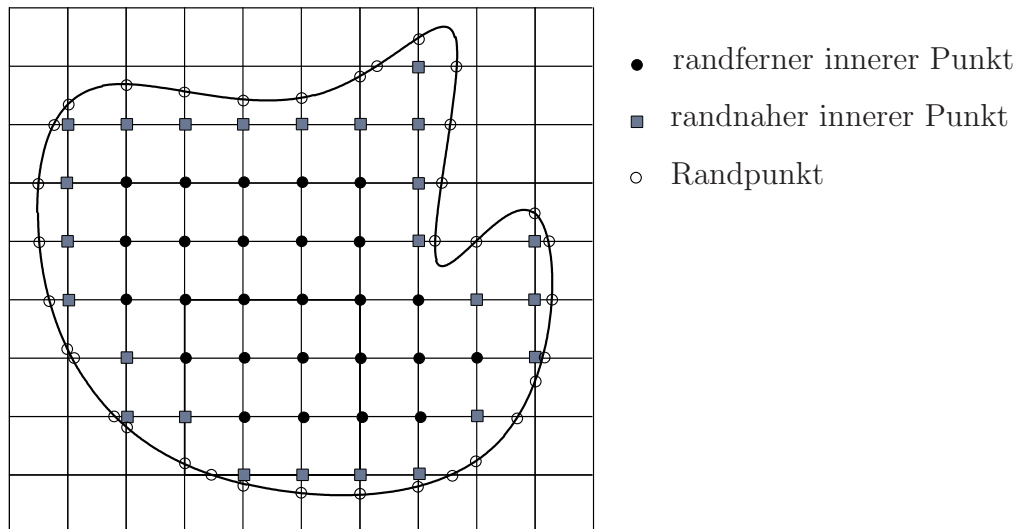


Abbildung 4.2.: Gebiet und Differenzengitter

Weiterhin muss auch die Gleichung diskretisiert werden:

Der oben erläuterte Ansatz verwendet das Poisson-Problem mit konstanter rechter Seite 1. In diesem Absatz findet eine allgemeinere Formulierung mit einer Funktion  $g$  als rechte Seite Anwendung. Es soll das Poisson-Problem

$$-\Delta u = g \text{ in } \Omega \text{ und } u = f \text{ auf } \partial\Omega \quad (4.7)$$

gelöst werden. Wir berechnen Lösungen  $u_h$  im Raum  $U_h$  der Gitterfunktionen zum oben definierten Gitter. Der Laplace-Operator  $\Delta$  kann über die Newtonschen dividierten Differenzen angenähert werden.

Zuerst betrachten wir eine eindimensionale Funktion  $u$ . Für  $x_1 < x < x_2$  gilt

$$u''(x) := \frac{2}{x_2 - x_1} \cdot \left[ \frac{u(x_2) - u(x)}{x_2 - x} - \frac{u(x) - u(x_1)}{x - x_1} \right] + r. \quad (4.8)$$

Für den Spezialfall  $x_2 = x + h$  und  $x_1 = x - h$  entspricht dies der zweiten dividierten Differenz

$$\frac{1}{h^2} (u(x_1) - 2 \cdot u(x) + u(x_2)) + r.$$

Allgemein gilt für den Rest  $r$  die Abschätzung

$$|r| \leq \frac{1}{2} \frac{(u(x_2) - u(x))^2 + (u(x) - u(x_1))^2}{x_2 - x_1} \|u\|_{C^3([x_1, x_2])}, \quad (4.9)$$

diese ergibt sich aus der Taylor-Entwicklung von  $u$  im Punkt  $x$ .

Kehren wir nun wieder zum zweidimensionalen Fall zurück: Man betrachte einen inneren Punkt  $P$  und seine vier Nachbarn  $A$ ,  $B$ ,  $C$  und  $D$ . Mit Hilfe von (4.8) kann ein

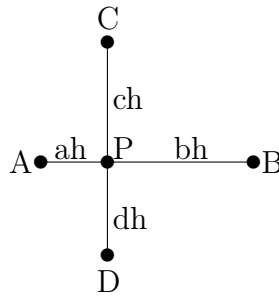


Abbildung 4.3.: Randnaher Gitterpunkt samt Differenzenstern

diskrete Formulierung für  $u_{xx}$  gefunden werden, analog geht dies für  $u_{yy}$ . Dies ermöglicht folgende Diskretisierung von  $\Delta u$ :

$$\begin{aligned} -D_h u(P) = \frac{1}{h^2} \cdot & \left( -\frac{2}{a(a+b)} \cdot u(A) - \frac{2}{b(a+b)} \cdot u(B) - \frac{2}{c(c+d)} \cdot u(C) \right. \\ & \left. - \frac{2}{d(c+d)} \cdot u(D) + \left( \frac{2}{a \cdot b} + \frac{2}{c \cdot d} \right) \cdot u(P) \right). \end{aligned} \quad (4.10)$$

Insbesondere gilt für randferne Punkte  $a = b = c = d = 1$  und somit

$$-D_h u(P) = \frac{1}{h^2} \cdot (-u(A) - u(B) - u(C) - u(D) + 4 \cdot u(P)).$$

Dies ist die Standard-„Fünfpunktformel“ zur Diskretisierung der Poisson-Gleichung. Das diskrete Randwertproblem lautet dann

$$-D_h u_h = R_h g = g_h \text{ auf } \Omega_h \text{ und } u_h = f_h \text{ auf } \Gamma_h, \quad (4.11)$$



wobei  $R_h$  als *Restriktion* von  $g$  auf die inneren Gitterpunkte zu betrachten ist und  $f_h$  der Auswertung von  $f$  an den Randpunkten  $\Gamma_h$  entspricht.

Es sei  $k := \#\Omega_h$  die Anzahl der inneren Punkte. Wir definieren eine  $k \times k$  *Diskretisierungsmatrix*  $L_h$  und eine weitere Matrix  $M_h$  mit  $k$  Zeilen. Ihre Spaltenanzahl entspricht der Anzahl der Randpunkte.

Für  $i, j \in \Omega_h$  seien die Einträge  $l_{i,j}$  in  $L_h$  gegeben durch

$$\begin{aligned} l_{i,i} &= \text{der Koeffizient von } u(i) \text{ in } -D_h u(i), \\ l_{i,j} &= \begin{cases} \text{der Koeffizient von } u(j) \text{ in } -D_h u(i) & \text{falls } i, j \text{ benachbart sind} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}. \end{aligned}$$

Für  $l \in \Gamma_h$  und  $i \in \Omega_h$  seien die Einträge  $m_{i,l}$  von  $M_h$  gegeben durch

$$m_{i,l} = \begin{cases} \text{der Koeffizient von } u(l) \text{ in } -D_h u(i) & \text{falls } i, l \text{ benachbart sind} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}.$$

In Matrixschreibweise erhält man aus (4.11)

$$L_h u_h = q_h \text{ mit } q_h = g_h - M f_h, \quad (4.12)$$

wobei  $u_h$  auf natürliche Weise durch  $i \in \Omega_h$  indiziert ist.

Das durch das lineare Gleichungssystem (4.12) definierte Differenzenschema nennt man *Shortley-Weller-Verfahren*.

#### 4.1.2.1. Eigenschaften des Shortley-Weller-Verfahrens

Mit dem obigen Verfahren bekommen wir für  $h \in \mathbb{R}^+$  eine diskrete Lösung  $u_h \in U_h$ , welche nur auf den Gitterpunkten definiert ist. Um diese mit der kontinuierlichen Funktion  $u$  zu vergleichen, betrachtet man auch  $u$  nur auf dem Gitter, das heißt, die *Restriktion* in den Raum  $U_h$ . Wir schreiben diese als  $R_h u$ . Von Interesse ist insbesondere der Grenzübergang  $h \rightarrow 0$ . Um die Güte des Differenzenverfahrens beurteilen zu können, betrachtet man eine Menge  $H \subset \mathbb{R}$  mit Häufungspunkt 0, zum Beispiel  $H = \{1/2^n \mid n \in \mathbb{N}\}$ .

**Definition 4.1.1** Eine Diskretisierung  $L_h$  heißt stabil bezüglich einer Norm  $\|\cdot\|_N$ , falls

$$\sup_{h \in H} \|L_h^{-1}\|_N < \infty.$$

Ein Differenzenverfahren ist nur von Nutzen, falls die diskreten Lösungen auf dem Gitter gegen die tatsächliche Lösung konvergieren:

**Definition 4.1.2** Die diskreten Lösungen  $u_h \in U_h$  konvergieren gegen  $u$ , falls

$$\|u_h - R_h u\|_\infty \rightarrow 0 \quad \text{für } h \rightarrow 0.$$

Eine Konvergenz der Ordnung  $k$  liegt vor, wenn

$$\|u_h - R_h u\|_\infty = \mathcal{O}(h^k) \quad \text{für } h \rightarrow 0.$$

Für die numerische Lösung des entstehenden Gleichungssystems ist darüber hinaus die Kondition von Bedeutung. Ist diese groß, so sind die relativen Fehler ebenfalls groß.

**Definition 4.1.3** Die Kondition einer Matrix  $A$  bezüglich einer Norm  $\|\cdot\|_N$  ist

$$\text{cond}(A) := \|A^{-1}\|_N \|A\|_N.$$

Bevor wir uns dem zuvor vorgestellten Differenzenverfahren zuwenden, ist ein Exkurs zu den sogenannten  $M$ -Matrizen notwendig. Diese sind hier von Bedeutung, da die Matrizen  $L_h$   $M$ -Matrizen sind.  $I_A$  bezeichne im Folgenden die Indexmenge der Matrix  $A$ .

**Definition 4.1.4** Eine Matrix  $A$  heißt  $M$ -Matrix, falls

$$a_{ii} > 0, a_{ij} < 0 \quad \text{für alle } i, j \in I_A, i \neq j \quad (4.13)$$

$$A \text{ nicht singulär und } A^{-1} \geq 0. \quad (4.14)$$

**Lemma 4.1.5** Sei  $A$  eine  $M$ -Matrix. Gibt es einen Vektor  $w$  mit  $Aw \geq 1$ , dann gilt  $\|A^{-1}\|_\infty \leq \|w\|_\infty$ .

Beweise zu diesen Sätzen finden sich in [30]. Dort findet man außerdem eine ausführliche Untersuchung des Shortley-Weller-Verfahrens samt Beweisen. Die wichtigsten Ergebnisse sind im Folgenden ohne Beweis wiedergegeben. Man betrachte Gebiete, die in eine Koordinatenrichtung beschränkt sind, das heißt, die in einem Streifen der Breite  $d_\Omega$  liegen.

**Lemma 4.1.6** Ist  $\Omega$  Teilmenge  $(x_0, x_0 + d_\Omega) \times \mathbb{R}$  oder von  $\mathbb{R} \times (y_0, y_0 + d_\Omega)$ , so ist  $L_h$  eine  $M$ -Matrix und es gilt  $\|L_h^{-1}\|_\infty \leq \frac{d_\Omega^2}{8}$ .

Somit ist das Differenzenschema stabil. Auch die Konvergenz des Shortley-Weller-Verfahrens ist gewährleistet, falls das Gebiet in einem Streifen liegt. Es gilt:

**Satz 4.1.7** Erfüllt  $\Omega$  die Voraussetzungen von Lemma 4.1.6, so konvergiert das Shortley-Weller-Verfahren von zweiter Ordnung, falls  $u \in C^{3,1}(\bar{\Omega})$ . Es gilt die Abschätzung:

$$\|u_h - R_h u\|_\infty \leq \frac{1}{3} h^3 \|u\|_{C^{2,1}(\bar{\Omega})} + \|L_h^{-1}\|_\infty \frac{1}{6} h^2 \|u\|_{C^{3,1}(\bar{\Omega})} \leq \left( \frac{1}{3} h^3 + \frac{d^2}{48} h^2 \right) \|u\|_{C^{3,1}(\bar{\Omega})}.$$

#### 4.1.2.2. Vorkonditionierung

Betrachtet man den Matrixeintrag der Matrix  $L_h$  zu einem randnahen Punkt mit Index  $i$ , so gilt

$$l_{i,i} = \frac{1}{h^2} \cdot \left( \frac{2}{ab} + \frac{2}{cd} \right) .$$

Dieser Wert kann für Punkte nahe des Randes sehr groß werden, somit sind die Maximumsnorm  $\|L_h\|_\infty$  und die Kondition der Matrix nicht beschränkt. Damit ist ein kleiner relativer Fehler nicht gewährleistet.

Wendet man eine einfache Vorkonditionierung an, so zeigt sich, dass das Verfahren auch numerisch sinnvoll ist. Wir betrachten eine diagonale Vorkonditionierung,  $D$  sei der Diagonalanteil der Matrix  $L_h$ . Wir nutzen die Diagonalmatrix  $\tilde{D} := 1/h^2 D^{-1}$  zur Vorkonditionierung und erhalten das neue Gleichungssystem

$$\tilde{L}_h u_h := (\tilde{D} L_h) u_h = \tilde{D} q_h =: \tilde{q}_h .$$

Zuerst wird getestet, ob dieses Verfahren die Kondition der Diskretisierungsmatrix verbessert. Das Beispielgebiet ist eine Einheitskreisscheibe um den Ursprung, die Gitterweite ist  $h = 1/2$  und der Ursprung des Differenzengitters wird im Intervall  $[0, 1/4] \times [0, 1/4]$  verschoben. Für  $100 \times 100$  Positionen werden die Matrizen  $L_h$  und  $\tilde{L}_h$  aufgestellt und deren Kondition bezüglich der Maximumsnorm berechnet. Abbildung 4.4 stellt die Konditionen in Bezug auf den Ursprung des Differenzengitters dar. Die linke Abbildung zeigt die Kondition des nicht-vorkonditionierten Systems, die rechte die Kondition der vorkonditionierten Matrix. Der Effekt der Vorkonditionierung ist deutlich zu erkennen.

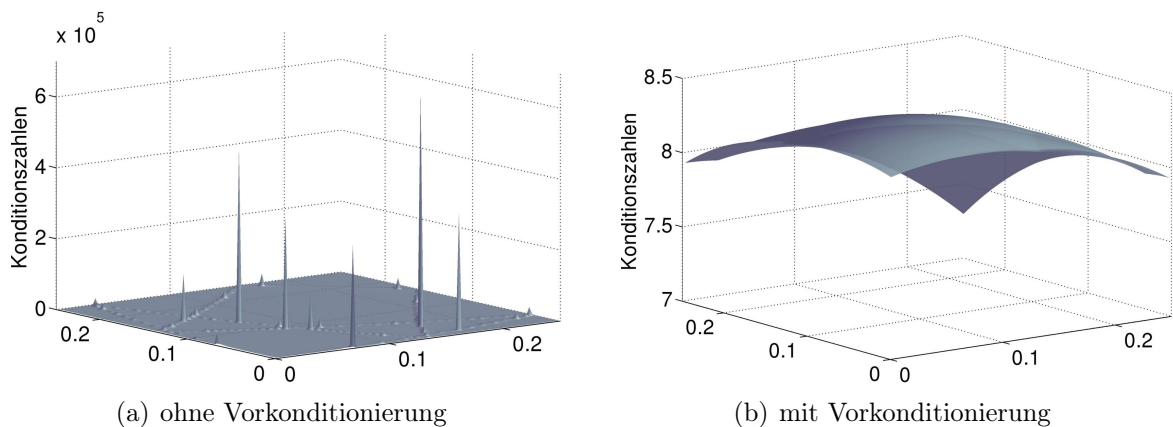


Abbildung 4.4.: Konditionsvergleich für die Diskretisierungsmatrix

Im Gegensatz zu  $L_h$  ist  $\tilde{L}_h$  immer gut konditioniert:

**Satz 4.1.8** Für  $\Omega \subset (x_0, x_0 + d_\Omega) \times \mathbb{R}$  oder  $\mathbb{R} \times \Omega \subset (y_0, y_0 + d_\Omega)$  ist die vorkonditionierte Matrix  $\tilde{L}_h$  eine  $M$ -Matrix und es gilt

$$\text{cond}(\tilde{L}_h) \leq 9 \frac{d_\Omega^2}{h^2}.$$

*Beweis:*  $L_h$  ist nach Lemma 4.1.6 eine  $M$ -Matrix. Die Einträge von  $\tilde{D}$  sind größer als Null und  $D$  ist invertierbar. Deshalb entsprechen die Vorzeichen der Einträge in  $\tilde{L}_h$  denen in  $L_h$ . Desweiteren gilt  $(\tilde{L}_h)^{-1} = L_h^{-1}(h^2 D^{-1})$  und  $h^2 D^{-1} > 0$ . Somit ist  $\tilde{L}_h$  eine  $M$ -Matrix.

Wir betrachten die Einträge von  $\tilde{L}_h$  und bezeichnen diese mit  $\tilde{l}_{i,j}$ . Auf der Diagonalen gilt  $\tilde{l}_{i,i} = 1/h^2$ , außerdem gilt  $\sum_{j \neq i} |\tilde{l}_{i,j}| \leq |\tilde{l}_{i,i}|$  wie bei  $L_h$ . Also gilt

$$\|\tilde{L}_h\|_\infty \leq 2/h^2.$$

Um die Norm von  $(\tilde{L}_h)^{-1}$  abzuschätzen, definieren wir den Quotienten aus der Summe der Nicht-diagonal-Elemente in einer Zeile und dem Diagonalelement

$$r_i := \frac{-\sum_{j \neq i} \tilde{l}_{i,j}}{\tilde{l}_{i,i}}$$

und zeigen, dass  $r_i \leq 5/6$  für randnahe Punkte mit Index  $i$  gilt. Jede Zeile gehört zu einem inneren Punkt  $P$ ; es gibt höchstens vier Einträge neben der Diagonalen. Wie zuvor seien  $A, B, C, D$  die Nachbarpunkte und  $ah, bh, ch$  und  $dh$  deren Abstände von  $P$ , mit  $0 < a, b, c, d \leq 1$ . Wir betrachten o.B.d.A. den Punkt  $A$  mit Index  $j$ . Ist dieser ein Randpunkt, so verschwindet der entsprechende Eintrag der Matrix, im anderen Fall gilt  $a = 1$  und die Matrix-Einträge von  $L_h$  sind

$$l_{i,j} = \frac{2}{h^2} \cdot \frac{-1}{a(a+b)} = \frac{2}{h^2} \cdot \frac{-1}{1+b}$$

bzw.

$$l_{i,i} = \frac{2}{h^2} \cdot \left( \frac{1}{ab} + \frac{1}{cd} \right) = \frac{2}{h^2} \cdot \frac{b+cd}{bcd},$$

also ist

$$\frac{-\tilde{l}_{i,j}}{\tilde{l}_{i,i}} = \frac{-l_{i,j}}{l_{i,i}} = \frac{1}{1+b} \cdot \frac{bcd}{b+cd} = \frac{bcd}{b+cd+b^2+bcd} \leq \frac{bcd}{3bcd+b^2cd} = \frac{1}{3+b}.$$

Analoge Abschätzungen gelten auch für die Einträge zu den Punkten  $B, C$  und  $D$ . Falls  $P$  ein randferner innerer Punkt ist, ist  $r_i = 1$ . Zwei weitere Fälle sind zu bedenken:

$P$  kann von drei inneren Punkten umgeben sein. Sei o.B.d.A.  $A$  der Randpunkt, dann gilt

$$r_i \leq \frac{1}{3+a} + \frac{1}{3+c} + \frac{1}{3+d} = \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{5}{6}.$$

Ist  $P$  von weniger als drei inneren Punkten umgeben, so gibt es höchstens zwei Nicht-diagonal-Einträge und es gilt  $r_i \leq \frac{2}{3}$ . In jedem Fall ist also  $r_i \leq \frac{5}{6}$  für randnahe Punkte  $P$  gewährleistet.

Wir wollen nun Lemma 4.1.5 anwenden. Daher soll einen Vektor  $w$  gefunden werden, so dass  $\tilde{L}_h w \geq 1$  gilt. O.B.d.A. liege  $\Omega$  im Streifen  $(x_0, x_0 + d_\Omega) \times \mathbb{R}$ . Wir verwenden die Funktion  $v : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  mit

$$v(x, y) := 2(x - x_0 + d_\Omega)(x_0 + 2d_\Omega - x).$$

Für diese ist

$$\frac{\partial}{\partial x} v(x, y) = 2(-2x + 2x_0 + d_\Omega) \text{ und } \frac{\partial^2}{\partial^2 x} v(x, y) = -4.$$

Weiterhin gilt

$$4d_\Omega^2 \leq v(x, y) \leq \frac{9}{2}d_\Omega^2, \quad (x, y) \in \Omega.$$

Für einen beliebigen Punkt  $(x, y)$  ist

$$\frac{v(x, y + h)}{v(x, y)} = \frac{v(x, y - h)}{v(x, y)} = 1.$$

Wir nehmen an, dass  $h/d_\Omega \leq 1/4$  gelte. Mit der Taylorentwicklung erhalten wir

$$\begin{aligned} \frac{v(x + h, y)}{v(x, y)} &= \frac{1}{v(x, y)} \left( v(x, y) + h \frac{\partial}{\partial x} v(x, y) + \frac{h^2}{2} \frac{\partial^2}{\partial^2 x} v(x, y) \right) \\ &= 1 + h \frac{2(-2x + 2x_0)}{v(x, y)} + h \frac{2d}{v(x, y)} - \frac{2h^2}{v(x, y)} \\ &\leq 1 + h \frac{2d}{4d^2} \leq \frac{9}{8}. \end{aligned}$$

Analog kann  $\frac{v(x-h, y)}{v(x, y)} \leq \frac{9}{8}$  gezeigt werden.

Wir setzen  $w := R_h v$ , werten also  $v$  an den Gitterpunkten aus. Die Funktion  $v$  ist quadratisch. Somit verschwinden die dritten Ableitungen und es gilt

$$-D_h w = -R_h \Delta v = 4 \text{ auf } \Omega_h \text{ und } w \geq 0 \text{ auf } \Gamma_h.$$

Es sei  $i$  der Index eines randfernen Punktes. Nach obiger Gleichung ist

$$\sum_j \tilde{l}_{j,i} w_j = \frac{1}{h^2 l_{i,i}} \sum_j l_{j,i} w_j \geq 4.$$

Für randnahe Punkte mit Index  $i$  gilt wiederum

$$\begin{aligned}
 \sum_j \tilde{l}_{j,i} w_j &= \tilde{l}_{i,i} w_i + \sum_{j \neq i} \tilde{l}_{j,i} w_j \\
 &\geq \tilde{l}_{i,i} w_i + \frac{9}{8} w_i \sum_{j \neq i} \tilde{l}_{j,i} \\
 &\geq \tilde{l}_{i,i} w_i - \frac{9}{8} w_i \frac{5}{6} \tilde{l}_{i,i} \\
 &= \frac{5}{32} \tilde{l}_{i,i} w_i \geq \frac{1}{16} \frac{1}{h^2} 4d_\Omega^2 \geq 4.
 \end{aligned}$$

Die erste Umformung ist gültig, da  $\tilde{l}_{i,j} = 0$ , falls die Punkte mit Index  $i, j$  nicht benachbart sind und sonst  $w_j \leq 9/8 w_i$  gilt. Die zweite Ungleichung beruht darauf, dass  $r_i \leq 5/6$  gilt, weiterhin wurde  $h/d_\Omega \leq 1/4$  angenommen.

Da  $\tilde{L}_h$  eine  $M$ -Matrix ist, folgt mit Lemma 4.1.5

$$\left\| \tilde{L}_h^{-1} \right\|_\infty \leq \|w\|_\infty \leq \|v\|_{L^\infty(\Omega)} \leq \frac{9}{2} d_\Omega^2,$$

und somit

$$\text{cond}(\tilde{L}_h)_\infty \leq 9 \frac{d_\Omega^2}{h^2}.$$

□

Eine Kondition der Größenordnung  $\mathcal{O}(h^{-2})$  ist für Differenzenverfahren typisch [30]. Nebenbei zeigt dieser Satz auch die Stabilität des vorkonditionierten Verfahrens. Die Konvergenz folgt direkt aus Satz 4.1.7. Das Shortley-Weller-Differenzenverfahren ist also ein numerisch stabiles Verfahren, um die Poisson-Gleichung auf beliebigen Gebieten des  $\mathbb{R}^2$  numerisch zu lösen.

### 4.1.3. Algorithmische Umsetzung

Das Shortley-Weller-Verfahren ist nur der erste Schritt in einem zweistufigen Prozess, dessen Aufbau Abbildung 4.5 illustriert. Der zweite Schritt ist die Approximation der so erhaltenen Punkte. Der komplette Algorithmus wurde in Matlab implementiert, Details dazu sind im Anhang A.4 zu finden.

Die wichtigsten Parameter sind die Gitterweiten  $h_D$  des Differenzengitters und  $h_A$  des zur Approximation genutzten Splineraumes  $\mathcal{B}_\Omega^n$ , sowie dessen Ordnung  $n$ . Der Ablauf soll anhand eines Beispiels erklärt werden:

Das Gebiet  $\Omega$  sei ein Kreisring mit Außenradius 1 und Innenradius  $1/3$ . Für  $\|x\|_2 \geq 1$  sei  $f$  durch  $-2 + x^2 + y^2$  gegeben, für  $\|x\|_2 \leq 1/3$  durch  $-5(x^2 + y^2)$ . Gesucht ist eine stetige Füllung.

Zuerst wird zum Differenzengitter  $G_D$  der Gitterweite  $h_D$  das Gleichungssystem (4.12) aufgestellt. Nun entscheidet die Größe von  $L_h$ , ob dieses direkt gelöst wird oder ob ein

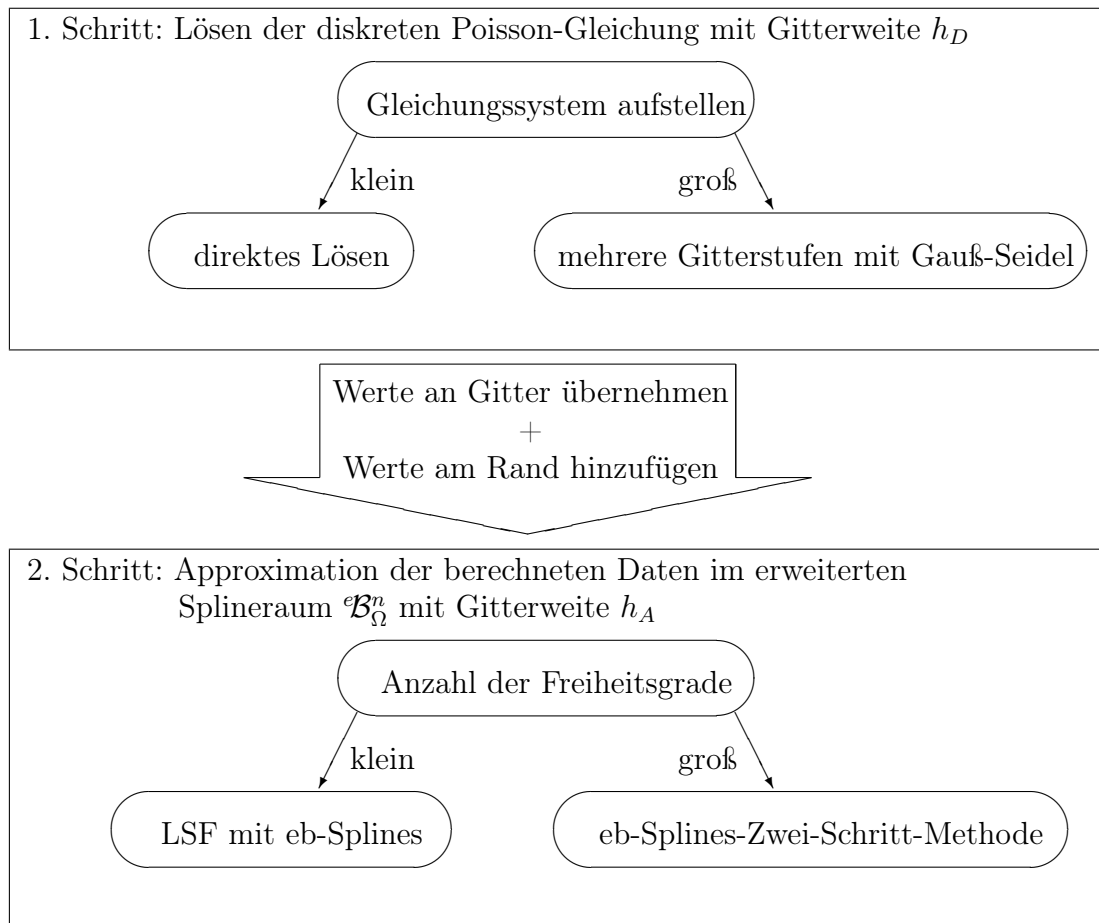


Abbildung 4.5.: Ablauf des Algorithmus

iterativer Löser verwendet wird. In beiden Fällen ist, wie zuvor gesehen, eine Vorkonditionierung nach der Diagonalen hilfreich. Das direkte Lösen führt zu den Werten  $u_h$  an den inneren Gitterpunkten. In diesem Beispiel ist  $h_D = 1/16$  und das entsprechende Gitter  $G_D$  ist in Abbildung 4.6(a) dargestellt.

Der iterative Prozess wiederum verläuft über mehrere Gitterstufen. Wir beginnen mit einem groben Gitter  $\hat{G}_D$  der Gitterweite  $\hat{h}_D := (h_D 2^{n_{\text{ref}}})$ , wobei die Anzahl der Verfeinerungsstufen  $n_{\text{ref}}$  bei allen präsentierten Beispielen zwei ist. Das Gitter  $\hat{G}_D$  wird so gewählt, dass alle inneren Punkte auch innerer Punkte von  $G_D$  sind. Abbildung 4.6(b) zeigt das gröbere Beispielgitter mit der Gitterweite  $1/8$ , auch in Abbildung 4.6(a) sind die Gitterpunkte entsprechend gekennzeichnet (Kreise). Das zugehörige Gleichungssystem wird aufgestellt und direkt gelöst. Somit erhalten wir auf dem groben Gitter die Werte  $\hat{u}$ . Dies ist praktikabel, da das Gleichungssystem ca.  $2^{(2 n_{\text{ref}})}$ -mal kleiner ist, als

das ursprüngliche, zu  $G_D$  gehörende.

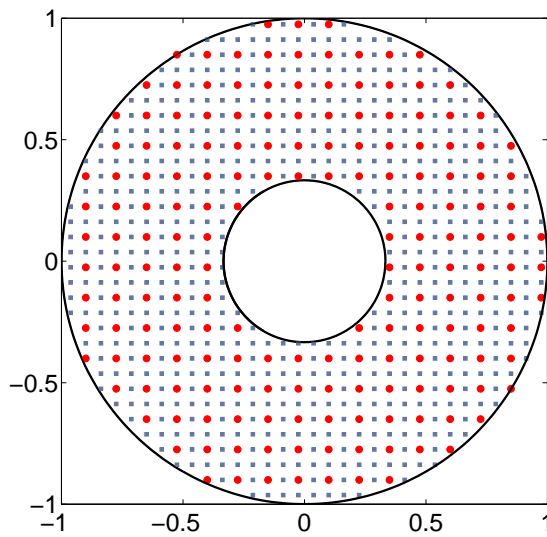
In den nächsten Schritten wird das Gitter binär verfeinert. Dabei entstehen neue innere Gitterpunkte. Wieder wird das Gleichungssystem (4.12) aufgestellt. Dieses wird nun jedoch nicht direkt, sondern iterativ mit dem Gauß-Seidel-Verfahren [27] gelöst, siehe Anhang A.2.

Als Startwerte verwenden wir an den aus dem groben Gitter übernommenen Punkten (Kreise) die entsprechenden Werte  $\hat{u}$ . Für die neuen Gitterpunkte (Rechtecke) werden Werte der umgebenden Punkte und der Randpunkte interpoliert. Abbildung 4.6(c) zeigt vier mögliche Punktkonfigurationen. Liegt ein neuer Punkt zwischen zwei alten Gitterpunkten, so wird, falls möglich, das Vierpunktschema mit den Gewichten  $-1/16, 9/16, 9/16$  und  $-1/16$  verwendet. Es werden also die Werte von vier alten Punkten zur Interpolation verwendet. Dies ist nicht möglich, wenn der neue Punkt in Randnähe liegt. Auch hier wird kubisch interpoliert, allerdings kann man nur zwei alte Punkte verwenden und den dritten Wert liefert der nächste Randpunkt. Diese Interpolationen finden in beide Koordinatenrichtungen statt. Ohne Wert verbleiben danach nur neue Punkte, die komplett von ebensolchen umgeben sind. Deren Werte werden durch Mittelung der Wertem, der vier benachbarten Gitterpunkte, berechnet. Das Gauß-Seidel-Verfahren glättet die so erhaltenen Startwerte und liefert eine approximative Lösung des Gleichungssystems. Nach einer im Voraus gewählten Anzahl von Iterationen erhalten wir eine Lösung zum aktuellen Differenzengitter. Die Konvergenz des Gauß-Seidel-Verfahren ist nach [5] und [30, Lemma 4.3.9] gewährleistet, da die Diskretisierungsmatrizen  $L_h$  diagonaldominant und irreduzibel sind.

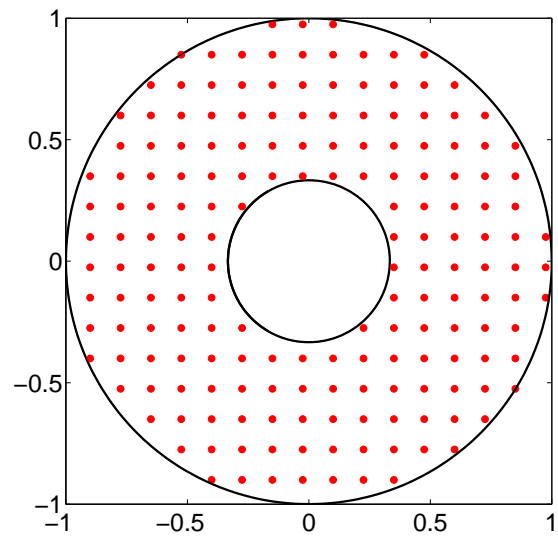
Diesen Prozess wiederholt man so oft, bis das ursprüngliche Gitter  $G_h$  erreicht und  $u_h$  berechnet ist. Auf diese Weise erhalten wir in beiden Fällen die inneren Gitterpunkte als Datenpunkte  $\Xi_1$  und die dazugehörigen Werte  $u_h$ . Zusätzlich wird eine Menge  $\Xi_2 \subset \partial\Omega$  gewählt, die Randfunktion  $f$  liefert die entsprechenden Werte. Abbildung 4.6(d) zeigt beide Punktmengen, durch schwarze Dreiecke sind die zusätzlichen Punkte  $\Xi_2$  gekennzeichnet.

Im zweiten Schritt des Algorithmus werden die gestreuten Daten  $\Xi := \Xi_1 \cup \Xi_2$  durch erweiterte Splines aus  $\mathcal{B}_\Omega^n$  approximiert. Wieder entscheidet die Anzahl der Freiheitsgrade in  $\mathcal{B}_\Omega^n$  und damit indirekt  $h_A$  darüber, wie wir vorgehen. Falls die Anzahl der Freiheitsgrade klein ist, so berechnen wir den globalen LSF, im anderen Fall verwenden wir das in Abschnitt 3.1 beschriebene Zwei-Schritt-Verfahren. In jedem Fall bekommen wir einen erweiterten Spline  $s_0 \in \mathcal{B}_\Omega^n$ . Dieser wird als Füllung verwendet, bzw. im Falle  $f = 0$  als Gewichtsfunktion für  $\Omega$ . Abbildung 4.7(a) zeigt die durch das Differenzenverfahren gewonnenen Punkte samt der zu approximierenden Werte. In Abbildung 4.7(b) ist der füllende bikubische erweiterte Spline  $s_0$  für  $h_A = 1/4$  samt Plot der Funktion  $f$  dargestellt. Eingefärbt ist der Graph nach dem Funktionswert.

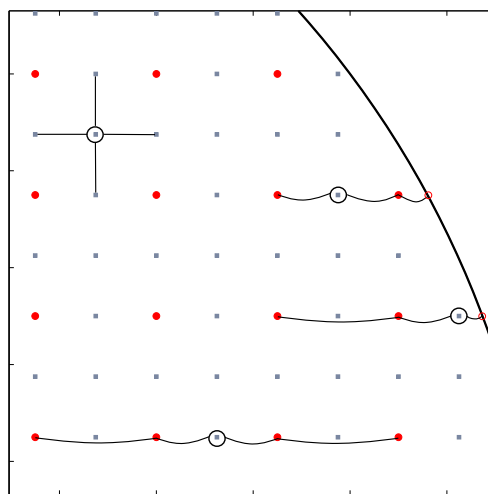




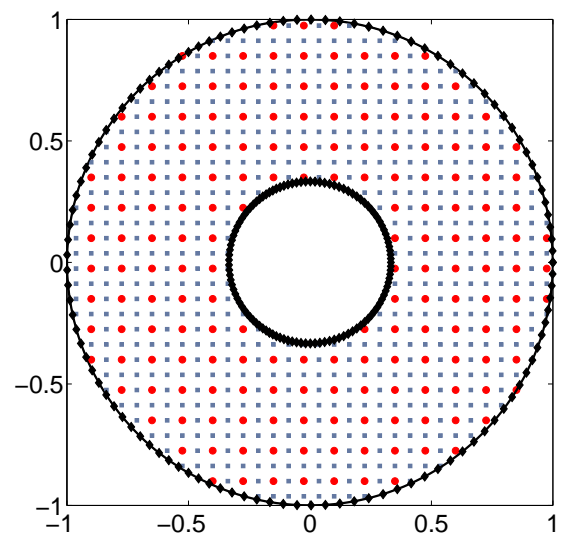
(a) feineres Gitter  $G_D$



(b) grobes Gitter  $\hat{G}_D$



(c) Interpolationsregeln



(d) Gitter und Datenpunkte am Rand

Abbildung 4.6.: Punkte auf dem Differenzengitter

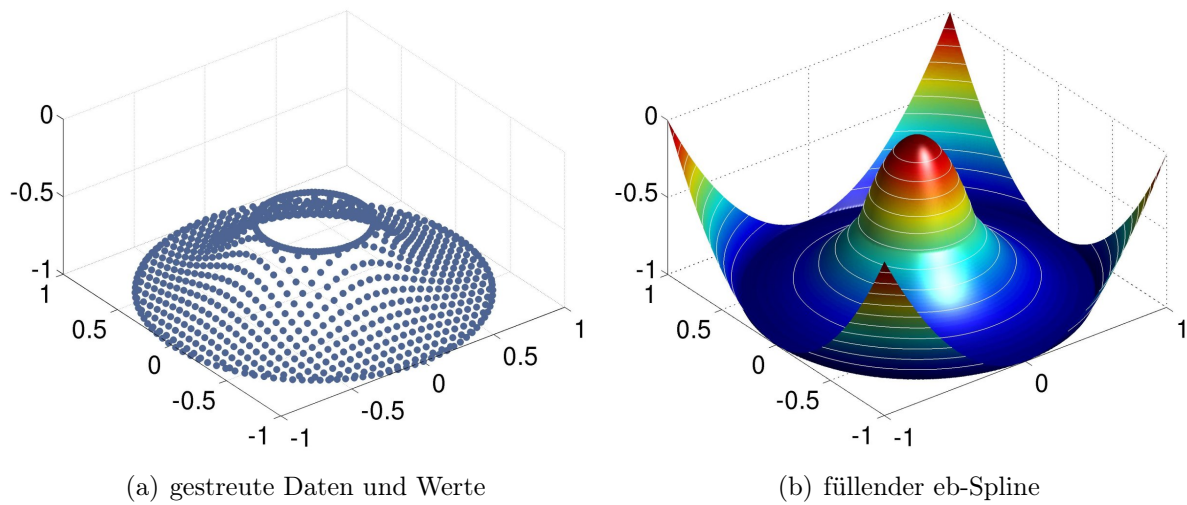


Abbildung 4.7.: Approximation der berechneten Daten

#### 4.1.4. Gewichtsfunktion als Anwendung

Eine Motivation dafür, randstetige Füllungen zu erzeugen, ist die automatische Konstruktion von Gewichtsfunktionen für web-Splines. Getestet wurde diese unter anderem an dem in Abbildung 4.8(a) dargestellten Gebiet  $\Omega$ . Dieses ist von einer Splinekurve mit dem Knotenvektor

$$T = [0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 1 \ 2 \ 3 \ 4 \ 5 \ 6 \ 7 \ 8 \ 9 \ 9 \ 9 \ 9]$$

und den Kontrollpunkten

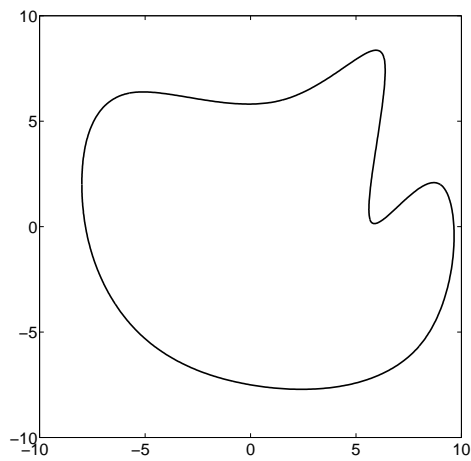
$$K = \begin{bmatrix} -8 & -8 & -7 & 2 & 8 & 4 & 10 & 10 & -2 & -7 & -8 & -8 \\ 2 & 4 & 8 & 4 & 12 & -4 & 6 & -8 & -8 & -4 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

berandet. In Abbildung 4.8 sind die berechnete Gewichtsfunktion sowie deren beiden ersten Ableitungen dargestellt. Es ist erkenntlich, dass diese, wie erwartet, beschränkt sind. Somit ist die Gewichtsfunktion zulässig.

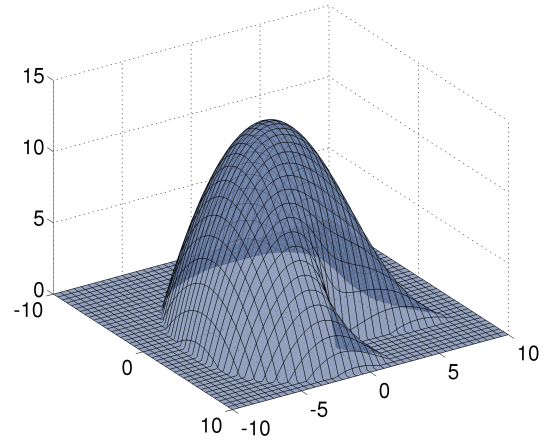
Für eine erste Beurteilung der Güte dieser Methode ist der Fehler am Rand von Interesse. Für  $n \in \{2, 3, 4\}$  wurden die experimentellen Konvergenzraten untersucht. Die verwendeten Gitterweiten sind

$$h_A \in \{2, 1, 1/2, 1/4, 1/8, 1/16\}.$$

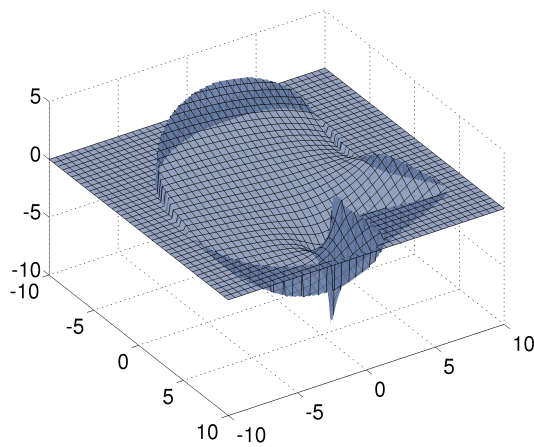
Um die Vergleichbarkeit zu gewährleisten, wird der bezüglich der  $\|w\|_\infty$  normierte maximale Fehler entlang der Randkurve verwendet. Zur Berechnung von  $w$  wird der zuvor präsentierte Algorithmus mit Randfunktion Null verwendet. Für die Differenzengitter im ersten Schritt des Verfahrens gilt jeweils  $h_D = h_A/4$ . Der bilogarithmische Graph



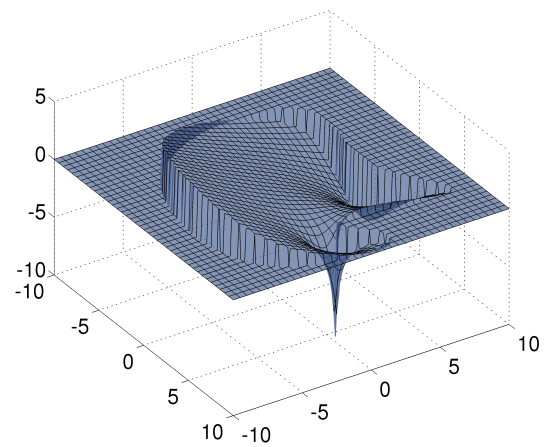
(a) Gebiet  $\Omega$



(b) Gewichtsfunktion  $w$



(c)  $\frac{\partial}{\partial x} w$



(d)  $\frac{\partial}{\partial y} w$

Abbildung 4.8.: Gewichtsfunktion für Beispielgebiet

in Abbildung 4.9 zeigt die experimentelle Konvergenzrate des Fehlers für verschiedene Splineordnungen. Alle Graphen zeigen eine deutliche Abnahme des Fehlers mit der Gitterweite. Mit bikubischen Splines werden schon für recht grobe Gitter Fehlergrößen erreicht, die deutlich unter den Fertigungstoleranzen liegen.

Zum Vergleich mit anderen Gewichtsfunktionen hat Bernhard Mößner einen Test durchgeführt. Mit dem Galerkin-Verfahren wurde im web-Spliner Raum eine approximative Lösung der Poisson-Gleichung

$$\begin{aligned} -\Delta u &= \frac{1}{2}e^{-2(x-2y)} \text{ auf } \Omega \\ u &= 0 \text{ auf } \partial\Omega \end{aligned}$$

berechnet. Zum Vergleich herangezogen werden zwei Methoden:

- Die in Abschnitt 1.2.1 kurz erläuterte Methode der Transfiniten-Mittelwert-Interpolation von Floater und Dyken, die dankenswerter Weise eine Implementierung zu Verfügung gestellt haben,
- die ebenfalls in Abschnitt 1.2.1 erläuterte geglättete Abstandsfunktion.

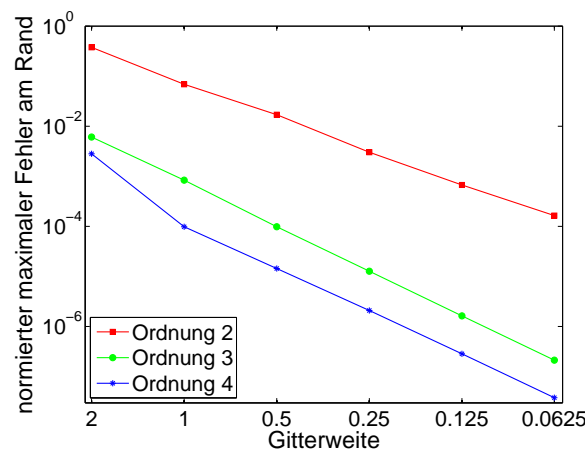
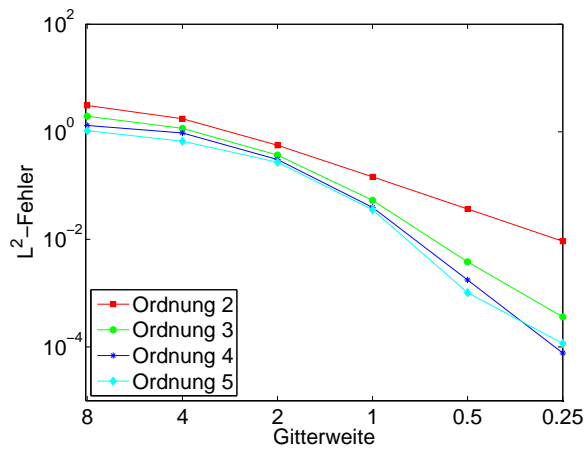
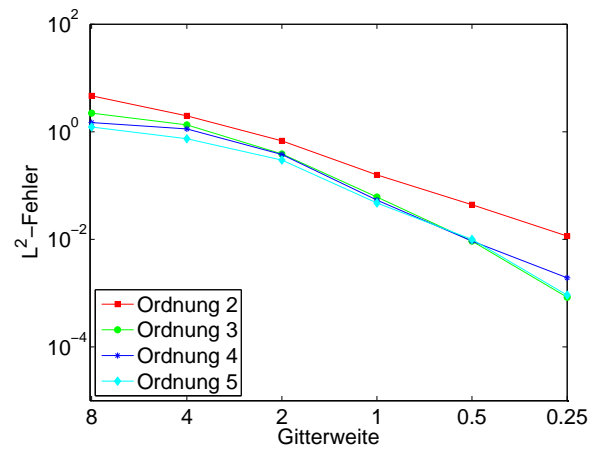


Abbildung 4.9.: Konvergenz des maximalen Fehlers am Rand über der Gitterweite

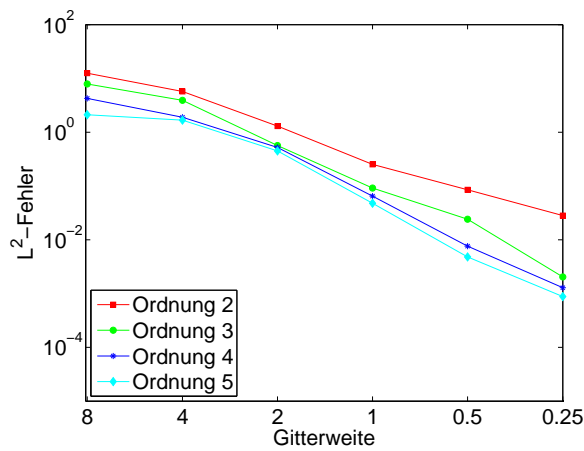
Die mit dem hier vorgestellten Algorithmus und der Gitterweite  $h = 1/20$  erzeugte Gewichtsfunktion dient als Referenzlösung. Abbildung 4.10(a) zeigt den  $L^2$ -Fehler der mit den hier präsentierten Methoden berechneten Gewichtsfunktion gegenüber der Referenzlösung. Besonders die Gewichtsfunktionen der Ordnung 3 zeigen eine gute Konvergenz. Für  $h = 1/4$  und  $n = 4$  liegt der Fehler bei  $10^{-4}$ . Damit ist er deutlich kleiner als die Fehler aller mit den anderen beiden Verfahren berechneten Lösungen. Abbildung 4.10(b) zeigt auch ein gutes Verhalten der Lösungen. Das Hauptproblem der Transfiniten-Mittelwert-Interpolation liegt in der langwierigen Berechnung der Funktion. Dies scheint ein rein numerisches Problem zu sein. Die in Abbildung 4.10(c) dargestellten Ergebnisse der geglätteten Abstandsfunktionen schwanken stark. Besonders bei



(a) Prasiswa



(b) Dyken/Floater



(c) Abstandsfunktion

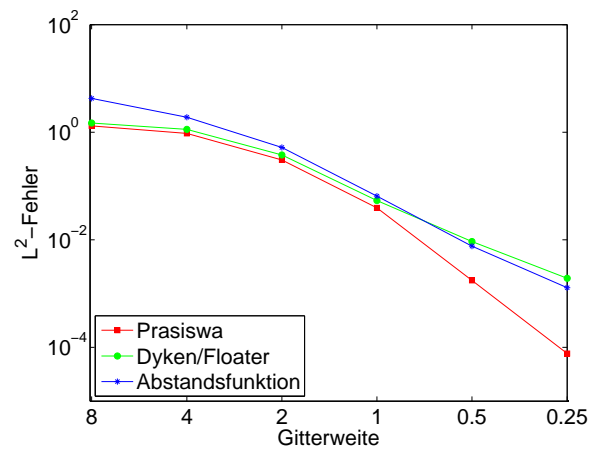

(d) Vergleich für  $n = 4$ 

Abbildung 4.10.:  $L^2$ -Fehler der berechneten Lösung über der Gitterweite

niedrigem Splinegrad sind diese Gewichtsfunktionen anderen Ansätzen unterlegen. Die Unterschiede werden im direkten Vergleich der drei Methoden für den Fall  $n = 4$  deutlicher, dieser ist in Abbildung 4.10(d) dargestellt. Diese Tests wurden mit vergleichbaren Ergebnissen für sechs verschiedenen Gebiete durchgeführt.

Die leichte Überlegenheit der hier entwickelten Methode ist vermutlich darin begründet, dass die Gewichtsfunktion – die bereits die näherungsweise Lösung einer Poisson-Gleichung ist – ein ähnliches Verhalten aufweist, wie die gesuchte Lösung. Eine gewisse, in der gewählten Referenzmethode liegende, Bevorteilung kann nicht ausgeschlossen werden, da keine explizite Lösung des Problems vorliegt.

## 4.2. Erzeugen eines $C^k$ -stetigen Übergangs

Abschnitt 4.1.3 zeigt ein erstes Beispiel einer stetigen Füllung. Während dies zur Konstruktion einer Gewichtsfunktion ausreicht, ist es besonders im Bereich der Computergrafik von großem Interesse, möglichst glatte Flächen zu erzeugen. Besonders kommt es auf die Krümmungstetigkeit der Flächen an, da diese die Reflexionslinien beeinflusst. Dieser Abschnitt untersucht die Güte der stetigen Füllung und stellt eine Möglichkeit vor, wie man aus einer  $C^k$ -stetigen Füllung eine  $C^{k+1}$ -stetige Füllung konstruieren kann.

### 4.2.1. Ansatz

Ausgehend von einer  $C^0$ -stetigen Füllung  $s_0$ , für die

$$s_0|_{\partial\Omega} = f|_{\partial\Omega}$$

gilt, soll mit erweiterten Splines eine  $C^1$ -stetige Füllung  $s_1$  konstruiert werden. Als Ansatz wird

$$s_1 = s_0 + w \tilde{s}_1$$

verwendet, wobei  $w$  eine Gewichtsfunktion auf  $\Omega$  sei, das heißt, es gelte  $w > 0$  auf  $\Omega$  und  $w = 0$  auf  $\partial\Omega$ . Offensichtlich gilt

$$s_1|_{\partial\Omega} = f|_{\partial\Omega}.$$

Zu erreichen ist außerdem

$$\nabla s_1|_{\partial\Omega} = \nabla f|_{\partial\Omega}.$$

Es soll also

$$\nabla f|_{\partial\Omega} = \nabla s_1|_{\partial\Omega} = \nabla s_0|_{\partial\Omega} + \nabla w \cdot \tilde{s}_1|_{\partial\Omega} + \underbrace{w \cdot \nabla \tilde{s}_1|_{\partial\Omega}}_0$$

gelten. Das heißt, auf  $\partial\Omega$  gilt

$$\tilde{s}_1 = \frac{\langle \nabla w, \nabla(f - s_0) \rangle}{\underbrace{\langle \nabla w, \nabla w \rangle}_{f_1}}.$$

Dass dies eine hinreichende Bedingung ist, wird in der allgemeinen Betrachtung gezeigt. Damit ist die Konstruktion von  $s_1$  auf das ursprüngliche Problem, eine randstetige Füllung  $\tilde{s}_1$  zur Funktion  $f_1$  zu berechnen, zurückgeführt. Durch den in den vorhergehenden Abschnitten erläuterten Algorithmus kann ein erweiterter Spline als Füllung berechnet werden. Auch die Gewichtsfunktion  $w$  kann über das zweistufige Lösen der entsprechenden Poisson-Gleichung berechnet werden. Die  $C^1$ -stetige Füllung  $s_1$  ist das Ergebnis der Berechnungen.

Verallgemeinern wir nun dieses Verfahren und wenden uns dem Problem zu, aus einer  $C^{k-1}$ -stetigen Füllung  $s_{k-1}$  eine  $C^k$ -stetige Füllung  $s_k$  zu ermitteln. Als Ansatz wählen wir analog zum bisherigen Vorgehen

$$s_k = s_{k-1} + w^k \tilde{s}_k. \quad (4.15)$$

Somit werden alle Ableitungen bis zur Ordnung  $(k-1)$  nicht verändert. Für einen be-

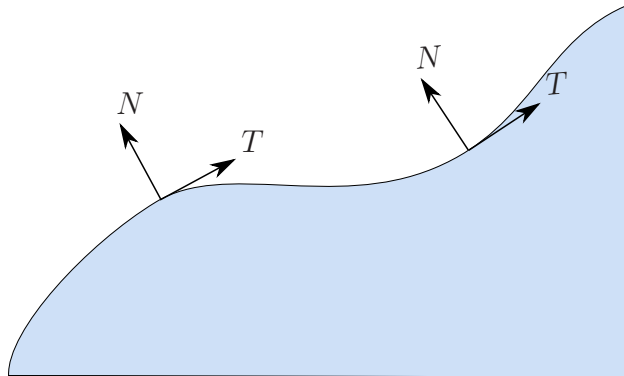


Abbildung 4.11.: Normale und Tangente an  $\partial\Omega$

liebigen linearen Differentialoperator  $D$  der Ordnung  $k$  können wir in einem beliebigen Punkt des Randes  $\partial\Omega$  die Ableitung in Tangentialrichtung  $D_T$  und die in Normalenrichtung  $D_N$  beschreiben, wie in Abbildung 4.11 dargestellt. Dies ist deswegen wichtig, weil  $D_T f = D_T s_k$  gilt. In der Tat stellt der Übergang von einer  $C^{k-1}$ -stetigen zu einer  $C^k$ -stetigen Fläche eine einzige Bedingung an  $\tilde{s}_k$ :

Sei

$$D := \sum_{i=0}^k c_i (D_T)^{k-i} (D_N)^i$$

ein Differentialoperator der Ordnung  $k$ . Gesucht ist ein  $s_k$ , so dass

$$D s_k|_{\partial\Omega} = D f|_{\partial\Omega}$$

gilt. Für  $i < k$  gilt

$$\begin{aligned} (D_T)^{k-i}(D_N)^i s_k|_{\partial\Omega} &= (D_T)^{k-i} \left( \underbrace{(D_N)^i s_{k-1}|_{\partial\Omega}}_{=(D_N)^i f|_{\partial\Omega}} + \underbrace{(D_N)^i w^k \tilde{s}_k|_{\partial\Omega}}_{=0} \right) \\ &= (D_T)^{k-i}(D_N)^i f|_{\partial\Omega}. \end{aligned}$$

Also reduzieren sich die Bedingungen, die nötig sind, um  $D s_k|_{\partial\Omega} = D f|_{\partial\Omega}$  zu gewährleisten, auf

$$(D_N)^k f|_{\partial\Omega} = (D_N)^k s_k|_{\partial\Omega} = ((D_N)^k s_{k-1} + (D_N)^k w^k \tilde{s}_k)|_{\partial\Omega}.$$

Wir zeigen per Induktion, dass

$$(D_N)^k w^k \tilde{s}_k|_{\partial\Omega} = k!(D_N w)^k \tilde{s}_k|_{\partial\Omega}$$

gilt. Nach der Produktregel gilt

$$D_N w \tilde{s}_k|_{\partial\Omega} = (D_N w) \tilde{s}_k|_{\partial\Omega} + \underbrace{(D_N \tilde{s}_k) w|_{\partial\Omega}}_{=0} = (D_N w)^1 \tilde{s}_k|_{\partial\Omega}.$$

Nehmen wir an, dass für  $m < k$

$$(D_N)^m w^m \tilde{s}_k|_{\partial\Omega} = m!(D_N w)^m \tilde{s}_k|_{\partial\Omega}$$

gelte, dann folgern wir

$$\begin{aligned} (D_N)^{m+1} w^{m+1} \tilde{s}_k|_{\partial\Omega} &= (D_N)^m \left( D_N w^{m+1} \cdot \tilde{s}_k + \underbrace{w^{m+1} \cdot D_N \tilde{s}_k}_{=0} \right)|_{\partial\Omega} \\ &= (D_N)^m (m+1) w^m (D_N w) \cdot \tilde{s}_k|_{\partial\Omega} \\ &= (m+1) (D_N)^m (D_N w \cdot \tilde{s}_k)|_{\partial\Omega} \\ &= (m+1)! (D_N w)^{m+1} \cdot \tilde{s}_k|_{\partial\Omega}. \end{aligned}$$

Daraus folgt

$$\tilde{s}_k = \underbrace{\frac{(D_N)^k (f - s_{k-1})}{k! (D_N w)^k}}_{f_k}. \quad (4.16)$$

Wie zuvor kann nun  $\tilde{s}_k$  als stetige Füllung zu den Randwerten  $f_k$  berechnet werden. In der obigen Formulierung muss in jedem Auswertungspunkt die Normalenrichtung



berechnet werden. Dies kann durch alternative Formulierungen von Problem (4.16) in der Implementierung vermieden werden.

Betrachten wir zunächst den Fall  $k = 2$ . In diesem Fall lautet die Bedingung

$$\tilde{s}_2 = \frac{(D_N)^2(f - s_1)}{2(D_N w)^2}.$$

Wegen der Rotationsinvarianz des Laplace-Operators und da  $(D_T)^2(f - s_1)$  am Rand verschwindet, ist

$$(D_N)^2(f - s_1)|_{\partial\Omega} = \Delta(f - s_1)|_{\partial\Omega}.$$

Außerdem gilt

$$N = \frac{\nabla w}{\|\nabla w\|} \text{ und damit } D_N w = \|\nabla w\|.$$

Somit erhält man die Formulierung

$$\tilde{s}_2 = \frac{\Delta(f - s_1)}{2\|\nabla w\|^2}.$$

Analog ist dies für alle geraden  $k := 2l$  möglich, da auch hier rotationsinvariante Operatoren gefunden werden können. Äquivalent zu (4.16) erhält man

$$\tilde{s}_{2l} = \frac{\Delta^l(f - s_{2l-1})}{(2l)!\|\nabla w\|^{2l}}.$$

Für ungerade  $k$  ist es nicht möglich, einen rotationsinvarianten Operator zu finden. Trotzdem kann die Berechnung vereinfacht werden. Es gilt

$$\frac{\partial^k}{\partial^k x}(f - s_{k-1})|_{\partial\Omega} = \alpha(D_N)^k(f - s_{k-1})|_{\partial\Omega} + \underbrace{\sum_{i=1}^k \alpha_i(D_N)^{k-i}(D_T)^i(f - s_{k-1})|_{\partial\Omega}}_0.$$

Für  $\alpha \neq 0$  gilt folglich

$$(D_N)^k(f - s_{k-1})|_{\partial\Omega} = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial^k}{\partial^k x}(f - s_{k-1})|_{\partial\Omega}.$$

Der Faktor  $\alpha$  hängt von dem Punkt ab, welchen wir betrachten.  $N$  sei die Normale. Dann gilt

$$\alpha = \left( \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, N \right\rangle \right)^k = \left( \frac{\frac{\partial}{\partial x} w}{\|\nabla w\|} \right)^k.$$

Somit reduziert sich Gleichung (4.16) auf

$$\tilde{s}_k = \frac{\frac{\partial^k}{\partial^k x}(f - s_{k-1})}{k! \left( \frac{\partial}{\partial x} w \right)^k}.$$

Dies gilt jedoch nur, falls

$$\left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, N \right\rangle \neq 0,$$

das heißt, falls der Rand nicht in  $x$ -Richtung verläuft. Analog gilt

$$\tilde{s}_k = \frac{\frac{\partial^k}{\partial^k y}(f - s_{k-1})}{k! \left( \frac{\partial}{\partial y} w \right)^k},$$

falls der Rand nicht in  $y$ -Richtung verläuft. Mit einer Fallunterscheidung nach der Richtung des Randes kann man also auch für ungerade  $k$  die Berechnung der Ableitungen in Normalenrichtung vermeiden.

### 4.2.2. Erstes Beispiel für eine $C^2$ -stetige Füllung

Die optische Beurteilung der Füllung ist besonders bei statischen Abbildungen schwierig. Deswegen werden im folgenden Beispiel neben den Graphen der Splines auch die *Höhenlinien* auf dem entsprechenden Gebiet gezeigt. Diese haben die gleiche Stetigkeit wie die entsprechende Fläche. Mit ihrer Hilfe können also einfach  $C^0$ -stetige von  $C^1$ -stetigen Flächen unterschieden werden.

Das wichtigste Kriterium für die Güte einer Fläche soll hier jedoch deren Krümmung sein. Deshalb sind die Graphen nach dem diskreten Laplace-Operator eingefärbt. Wie in [31] beschrieben, ist es einfach, die *Isophoten*, das heißt, die Linien, die paralleles Licht, mit gleicher Intensität reflektieren, zu untersuchen.

**Definition 4.2.1** *Es seien  $L$  die Lichtrichtung und  $N(x,y)$  die normierten Normalenvektoren der parametrisierten Fläche  $f(x,y)$ , dann sind die Isophoten von  $f$  die Mengen*

$$I_l := \{(x,y) \mid \langle N(x,y), L \rangle = l\}, l \in \mathbb{R}.$$

*Die Isophoten einer  $C^k$ -stetigen Fläche sind  $C^{k-1}$ -stetig.*

Hier werden sie vor allem dazu verwendet,  $C^1$ -stetige von  $C^2$ -stetigen Flächen zu unterscheiden und zu untersuchen, wie sich Glättung auf die Flächen auswirkt.

Abbildung 4.12 zeigt die Problemstellung des ersten Beispiels. Das Beispielgebiet ist die offene Kreisscheibe  $\Omega = B_1(0)$ . Außerhalb von  $\Omega$  ist die Funktion

$$f(x,y) = \sin(3x) + \cos(5y)$$

gegeben. Es soll eine  $C^2$ -stetige Füllung konstruiert werden.

In den folgenden Abbildungen (4.13-4.15) sind verschiedenen Stufen des beschriebenen Algorithmus dargestellt. Es wird im gesamten Prozess ein bikubischer erweiterter Splineraum mit Gitterweite  $1/32$  verwendet, sowohl für die einzelnen Bestandteile der

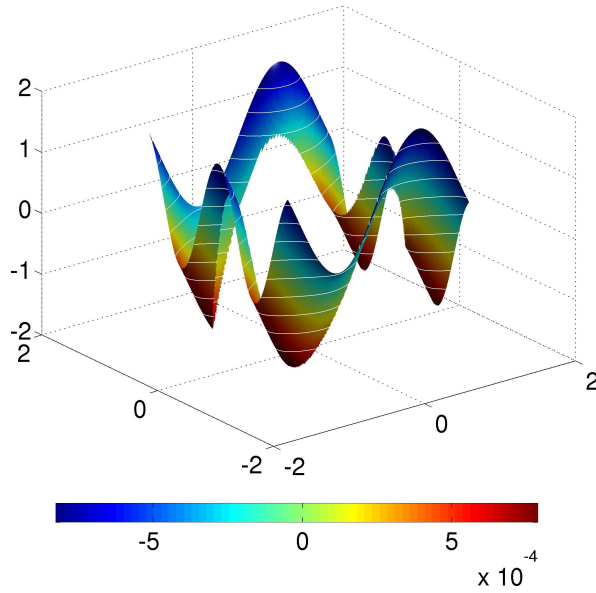


Abbildung 4.12.: Problemstellung

Füllungen als auch für die im Prozess benötigte Gewichtsfunktion. Abbildung 4.13 zeigt die erste Stufe: eine stetige Füllung. Sowohl im Graphen als auch an den Höhenlinien ist zu erkennen, dass die Funktion stetig ist. Es ist deutlich, dass die Isophoten nicht stetig sind. Dies unterscheidet die erste Füllung klar von der nächsten in Abbildung 4.14 gezeigten Füllung. Hier sind die Isophoten stetig. Dies untermauert den optischen Eindruck einer  $C^1$ -stetigen Füllung, den Graph und Höhenlinien vermitteln. Sowohl der nach dem diskreten Laplace-Operator eingefärbte Graph als auch die Knicke in den Isophoten zeigen jedoch deutlich die Sprünge in der Krümmung am Gebietsrand. Abbildung 4.15 bestätigt, dass eine weitere Stufe des Prozesses eine  $C^2$ -stetige Füllung erzeugt. Die Übergänge in der Farbgebung des Graphen sehen glatt aus, was die nun differenzierbaren Isophoten untermauern.

Diverse Experimente mit anderen Gebieten und Funktionen zeigen vergleichbare Ergebnisse. Weitere Beispiele finden sich im Anhang A.3. Dass die hier vorgestellte Füllung auch im Inneren glatt ist, ist jedoch der Glattheit der Randkurve geschuldet. Wie man bei weniger glatt berandeten Gebieten das Innere der Füllung glätten kann, wird im nächsten Abschnitt beschrieben.

### 4.2.3. Glätten des füllenden Splines

Es sei  $s_k$  eine  $C^k$ -stetige Füllung. Um den stetigen Übergang zu erhalten und zusätzlich die Füllung im Inneren zu glätten, wählen wir einen verwandten Ansatz:

$$u := s_k + \underbrace{w^{k+1}}_{\tilde{u}} \tilde{u}.$$

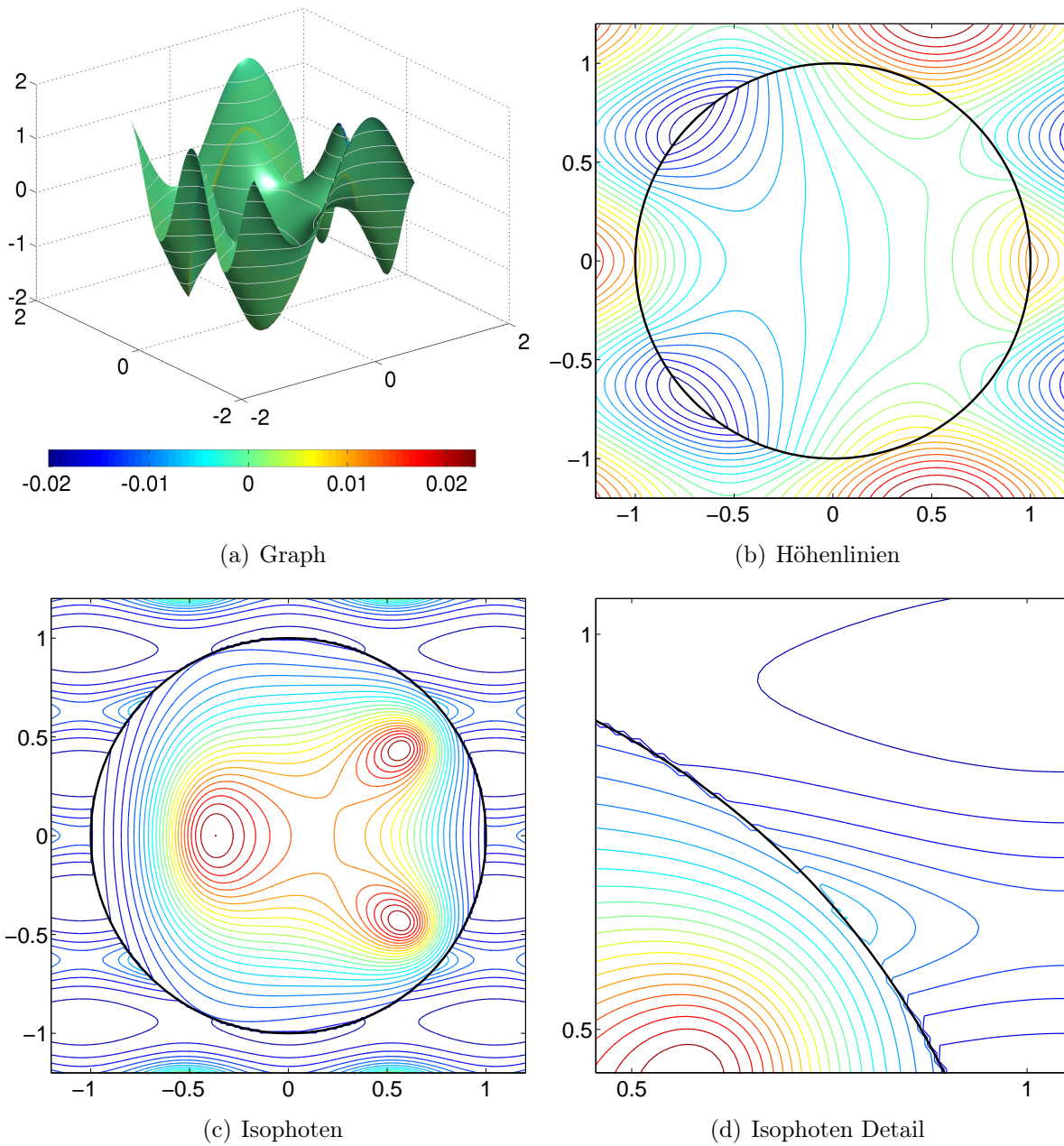


Abbildung 4.13.:  $C^0$ -stetige Füllung  $s_0$

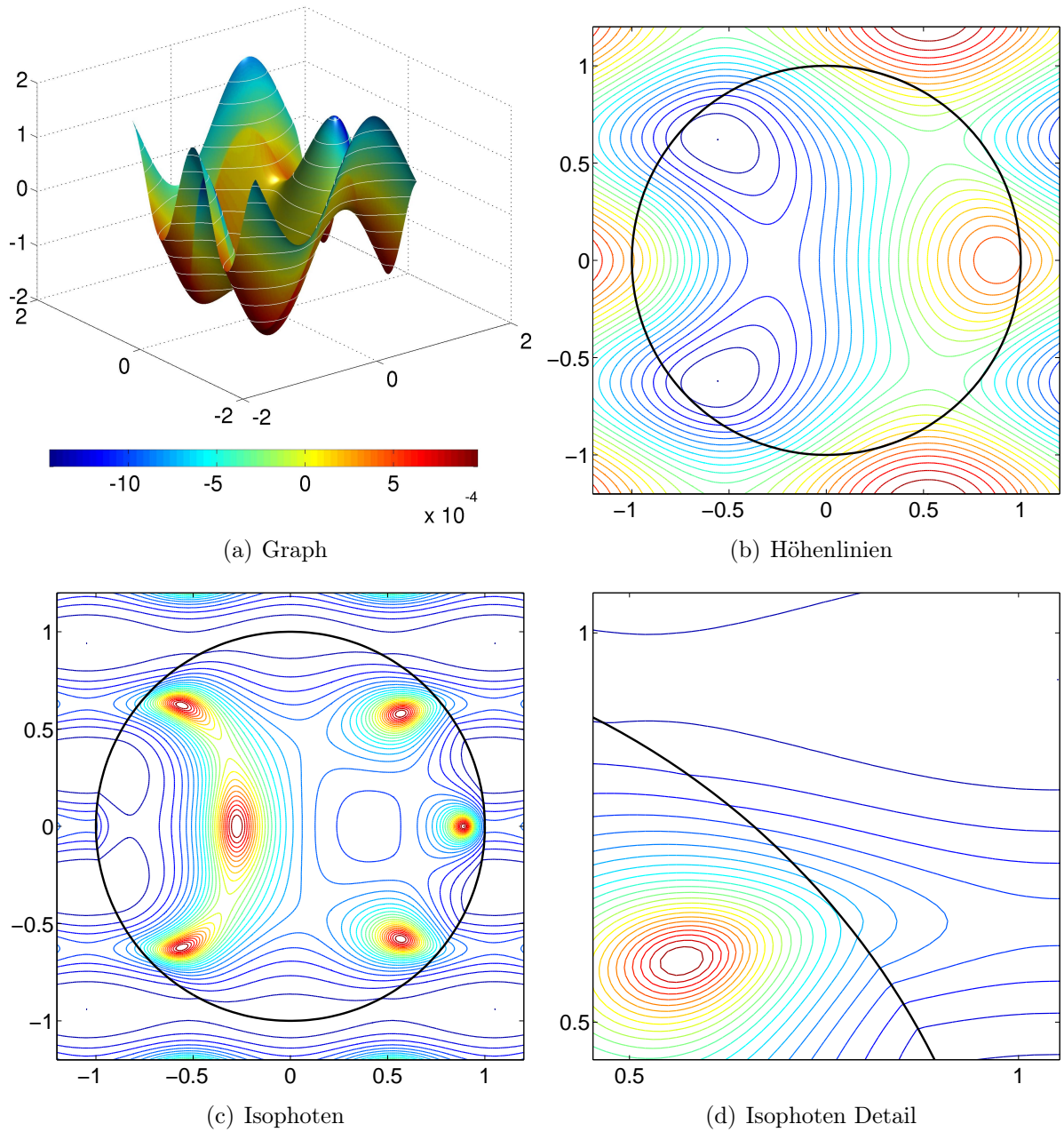


Abbildung 4.14.:  $C^1$ -stetige Füllung  $s_1$

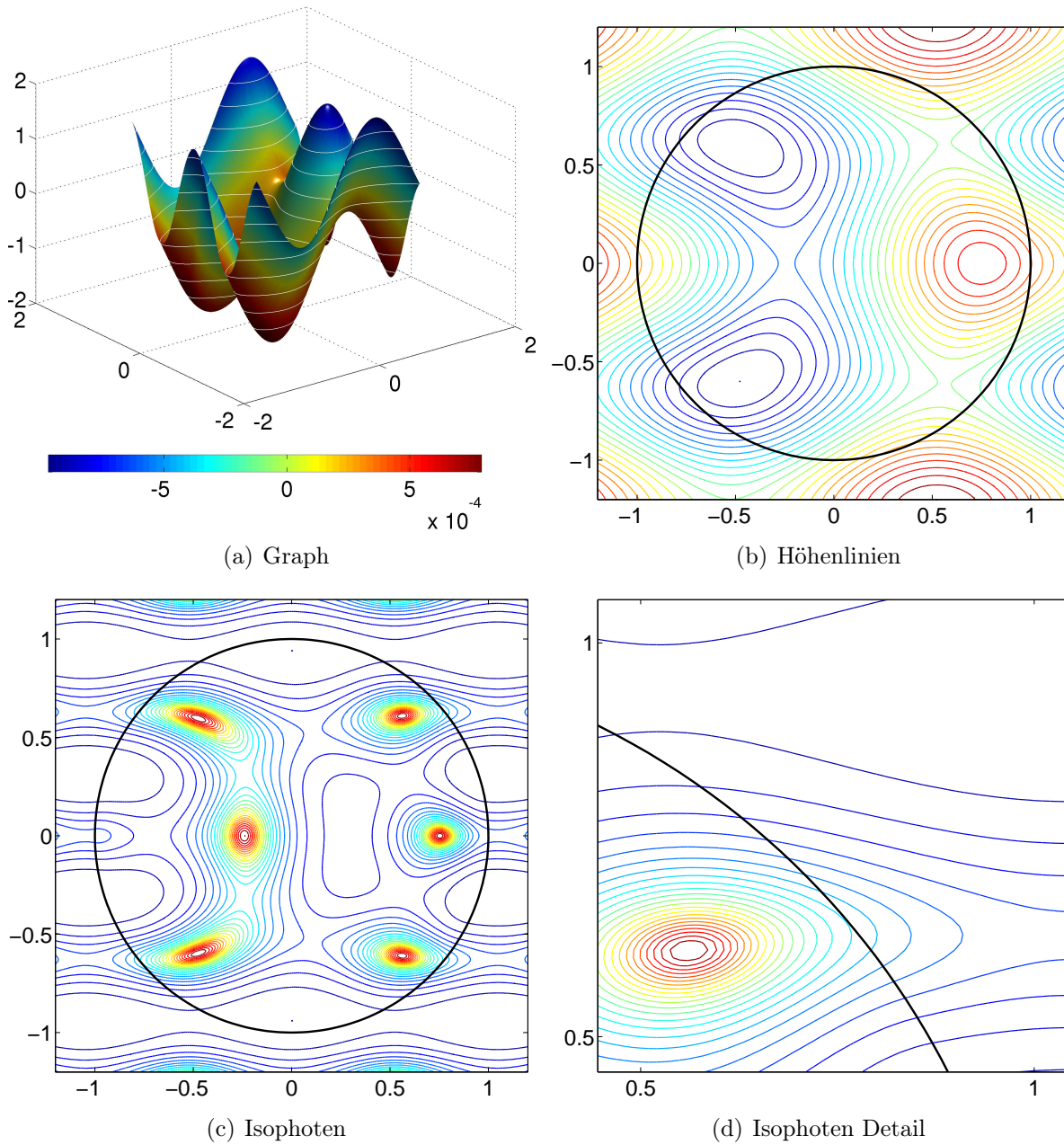


Abbildung 4.15.:  $C^2$ -stetige Füllung  $s_2$

Dabei sei erneut  $w$  eine auf  $\partial\Omega$  verschwindende Gewichtsfunktion. Diese Konstruktion bedingt, dass am Rand die Ableitungen nicht geändert werden. Für jeden Differentialoperator  $D$  bis zur Ordnung  $k$  gilt auf dem Rand  $\partial\Omega$

$$D u = D s_k.$$

Die Glättung erfolgt nun über eine Energieminimierung, das heißt,  $\hat{u}$  wird so gewählt, dass ein bestimmtes Energiefunktional minimiert wird. Getestet werden die Energiefunktionale zweiter bzw. dritter Ordnung

$$E_1(u) = \int (\Delta u)^2 \text{ und } E_2(u) = \int \int \left( \left( \frac{\partial^3}{\partial^3 x} u \right)^2 + \left( \frac{\partial^3}{\partial^3 y} u \right)^2 \right) dx dy.$$

Die entsprechende Glättung sei hier als *Laplace-Glättung* bzw. *Glättung dritter Ordnung* bezeichnet.

Im Folgenden ist das Aufstellen eines Gleichungssystems zur Minimierung von  $E_1(u)$  beschrieben; für andere Funktionale verläuft diese analog. Es sei

$$\hat{u} = w^{k+1} \tilde{u} = w^{k+1} \sum_{i \in I_\Omega} c_i B_i = \sum_{i \in I_\Omega} c_i (w^{k+1} B_i)$$

und damit

$$\begin{aligned} E_1(u) &= \int (\Delta u)^2 = \int (\Delta \hat{u})^2 + 2 \int (\Delta \hat{u})(\Delta s_k) + \int (\Delta s_k)^2 \\ &= \underbrace{\sum_{i,j \in I_\Omega} c_i c_j \int \Delta(w^{k+1} B_i) \Delta(w^{k+1} B_j) + 2 \sum_{i \in I_\Omega} c_i \int \Delta(w^{k+1} B_i) \Delta s_k}_{E_1^*(\hat{u})} + \int (\Delta s_k)^2. \end{aligned}$$

Somit entspricht die Minimierung von  $E_1(u)$  der Minimierung von  $E_1^*(\hat{u})$ . In Matrixschreibweise gilt  $E_1^* = c^T U c + 2cF$  mit

$$c := (c_i)_{i \in I_\Omega}, U := \left( \int \Delta(w^{k+1} B_i) \Delta(w^{k+1} B_j) \right)_{i,j \in I_\Omega}$$

und

$$F := \left( \int \Delta(w^{k+1} B_i) \Delta(s_k) \right)_{i \in I_\Omega}.$$

Somit reduziert sich das Minimierungsproblem auf das Lösen des Gleichungssystems

$$U c = -F.$$

Die Konstruktion von  $\tilde{u}$  ist unabhängig von der Form von  $s_k$ . Der Funktionenraum, in dem minimiert wird, ist frei wählbar. Somit ist es möglich, einen anderen Splineraum zu

verwenden als zuvor bei der Konstruktion von  $s_k$ . Es kann zum Beispiel eine kleinere Gitterweite oder ein anderer Splinegrad gewählt werden. Es ist sogar ratsam, einen feiner auflösenden Splineraum zu wählen, da somit die Oszillationen der Füllung besser glättet werden können.

Das Beispielgebiet  $\Omega$  ist diesmal durch drei rationale Bezierkurven berandet, vgl. Abbildung 4.16(b). Im Gegensatz zu den bisher betrachteten Gebieten hat es eine Spitze. Die außerhalb von  $\Omega$  gegebene Funktion sei  $f(x,y) := -1 + x^3 + y^3$ . Wir wählen wieder einen bikubischen erweiterten Splineraum  $\mathcal{B}_\Omega^n$  zur Approximation und verwenden  $h_a = 1/16$ . Wie zuvor wird ein feineres Differenzengitter verwendet; dieses hat die Gitterweite  $h_D = 1/64$ .

In den Abbildungen 4.16(c) und (d) sind die so berechnete  $C^2$ -stetige Füllung und deren Isophoten dargestellt. Der Graph ist erneut nach dem Laplace-Operator eingefärbt. In der Spitze des Gebiets sind leichte Schwankungen in der Krümmung zu erkennen, die deutlicher werden, wenn man einem Ausschnitt der Fläche betrachtet.

Abbildung 4.17 zeigt in der oberen Zeile nochmals Details der Füllung und ihrer Isophoten im Bereich der Spitze. Die untere Zeile wiederum zeigt den gleichen Ausschnitt nach einer Glättung. Minimiert wird bezüglich des Energiefunktional  $E_1$ . Der hierzu verwendete erweiterte Splineraum hat die Gitterweite  $h = 1/32$ . Diese ist also kleiner als bei der Konstruktion der Füllungen. Man erkennt deutlich, dass der Graph geglättet wurde.

Abbildung 4.18 zeigt Glättungen bezüglich des Energiefunktional  $E_2$ , also Glättungen dritter Ordnung. Ausgehend von der in 4.17(a) und (b) dargestellten  $C^2$ -stetigen Füllung wird in zwei verschiedenen Splineräumen minimiert. Die erste Zeile zeigt das Ergebnis bei Glättung im Splineraum mit der Gitterweite  $1/16$ , die zweite das Ergebnis bei Glättung im Splineraum mit der Gitterweite  $1/32$ .

Ein gutes Ergebnis wird dadurch erzielt, dass man beginnend mit der  $C^1$ -stetigen Füllung eine Laplace-Glättung durchgeführt wurde. Die Ergebnisse sind in Abbildung 4.19 wiedergegeben, wobei die kritische Region vergrößert dargestellt ist. Der zur Glättung verwendete Splineraum hat erneut die Gitterweite  $1/32$ .

Es sind in diesem Kontext sicher noch einige andere Energiefunktionale denkbar, auch kann man noch größere Splineräume zur Glättung verwenden. Es ist auch denkbar, schon in dem Prozess, in dem die  $C^k$ -stetige Füllung berechnet wird, nach jeder Stufe zu glätten. An dieser Stelle wird auf weiteren Experimente verzichtet.

### 4.3. Übertragbarkeit der Verfahren auf den $\mathbb{R}^d$

Alle in diesem Kapitel vorgestellten Verfahren sind problemlos auf Gebiete im  $\mathbb{R}^d$  übertragbar. Es soll hier nicht im Detail beschrieben werden, wie dies umgesetzt werden kann, auch werden keine Beweise für die postulierten Eigenschaften gegeben. Diese verlaufen stets analog zum zweidimensionalen Fall. Die Approximationsverfahren aus



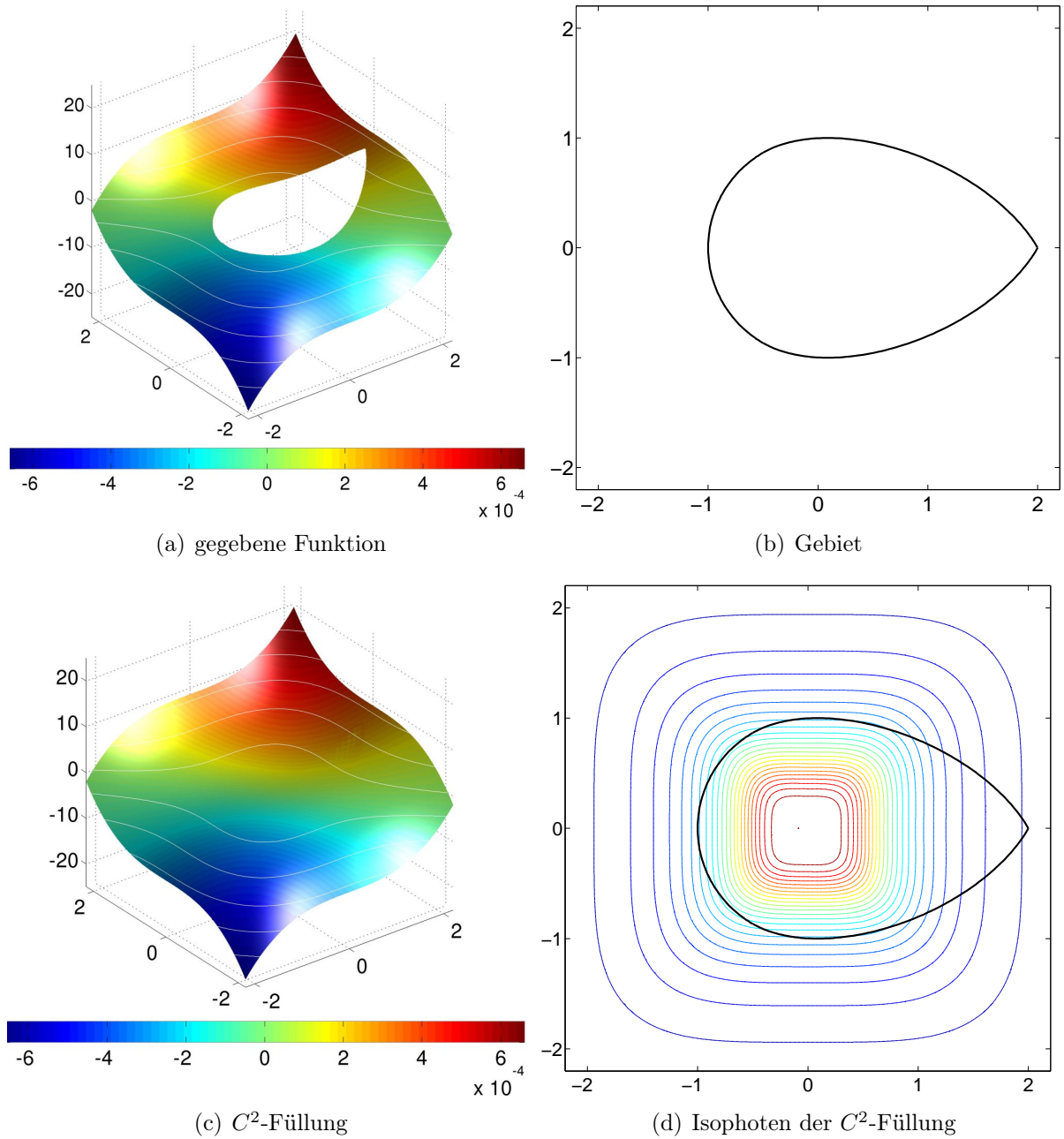


Abbildung 4.16.: Ausgangssituation und erste  $C^2$ -stetige Füllung

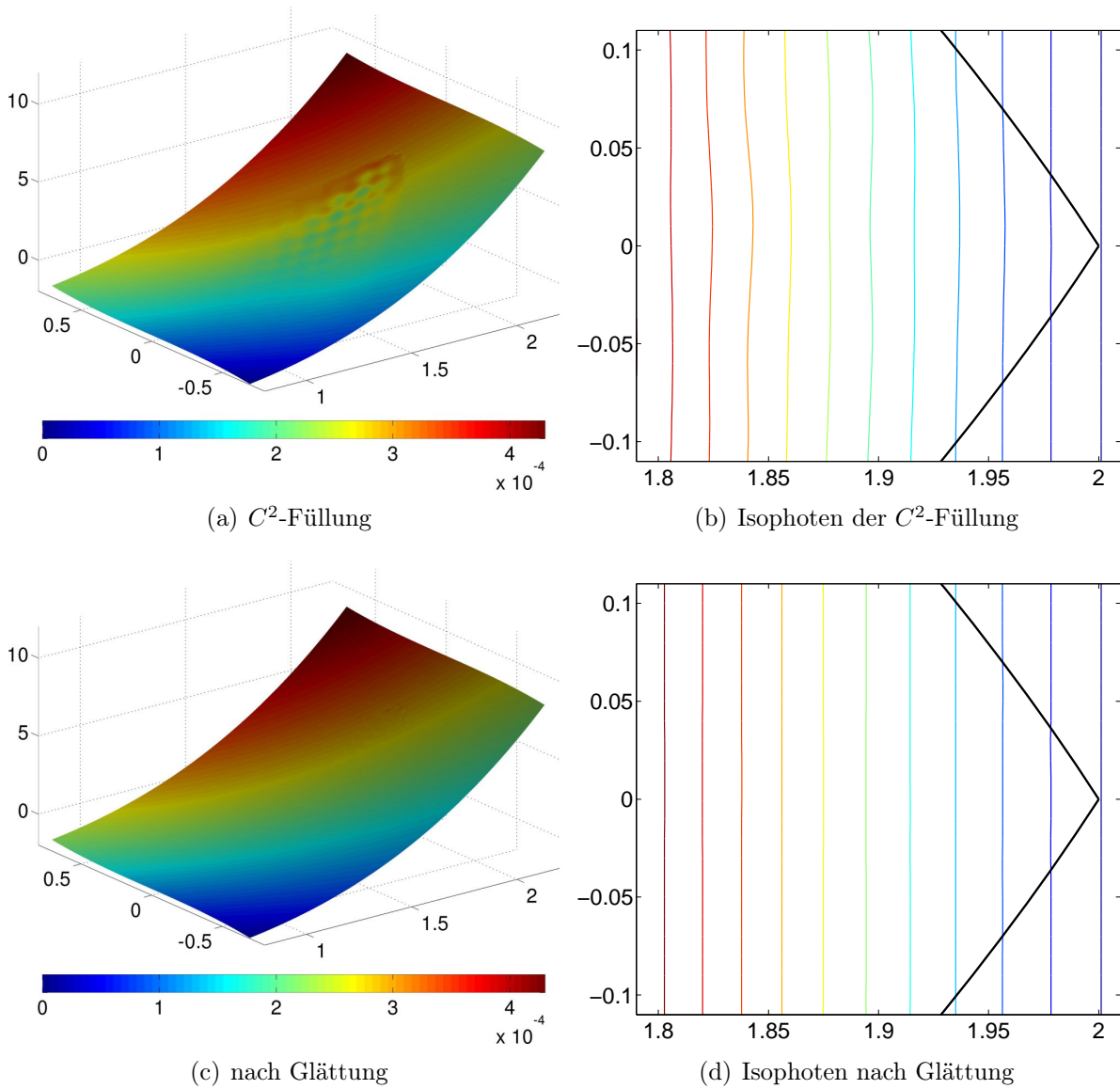


Abbildung 4.17.: Details  $C^2$ -stetige Füllung und Laplace-Glättung

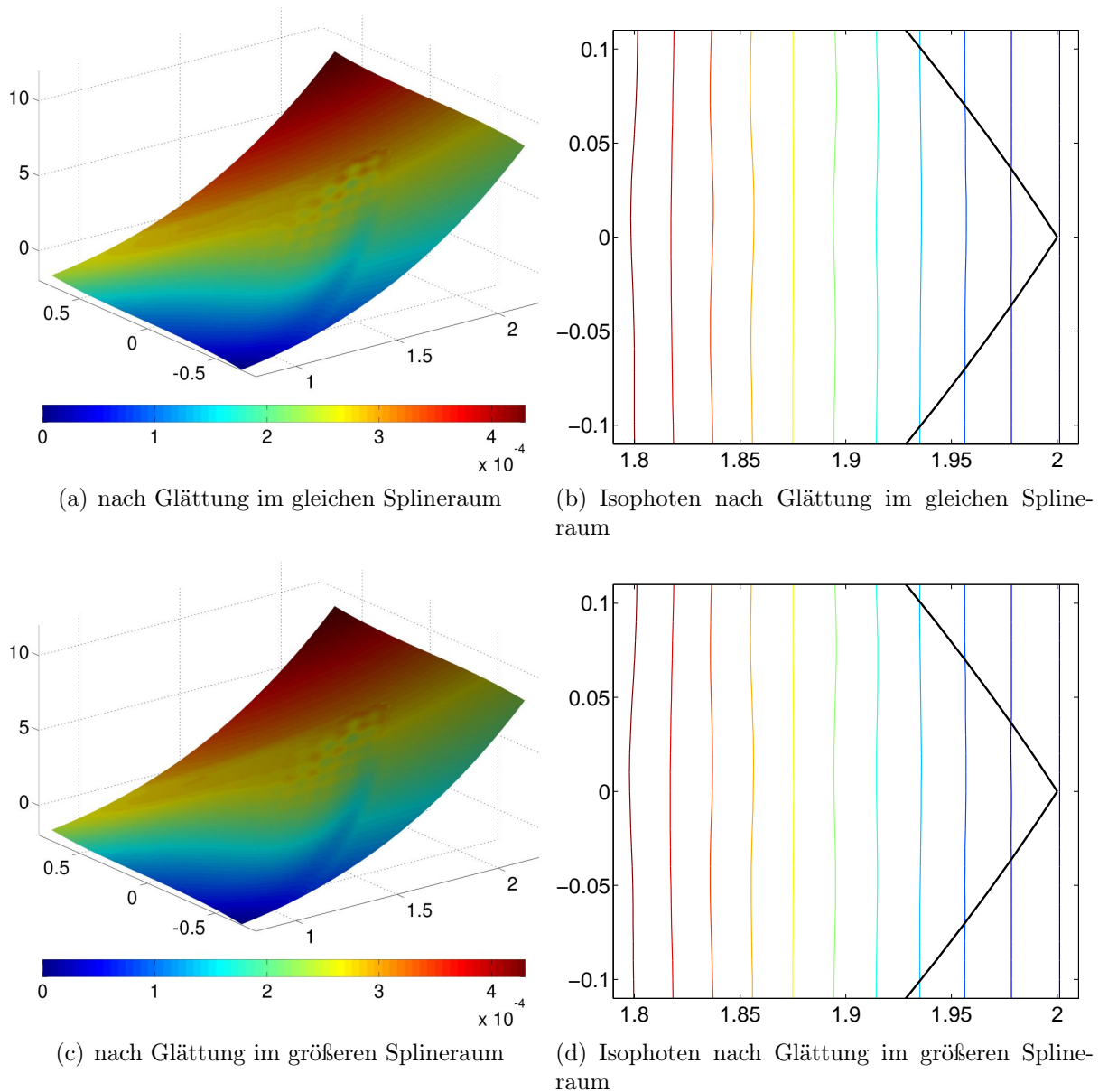


Abbildung 4.18.:  $C^2$ -stetige Füllung nach Glättung dritter Ordnung mit verschiedenen Gitterweiten

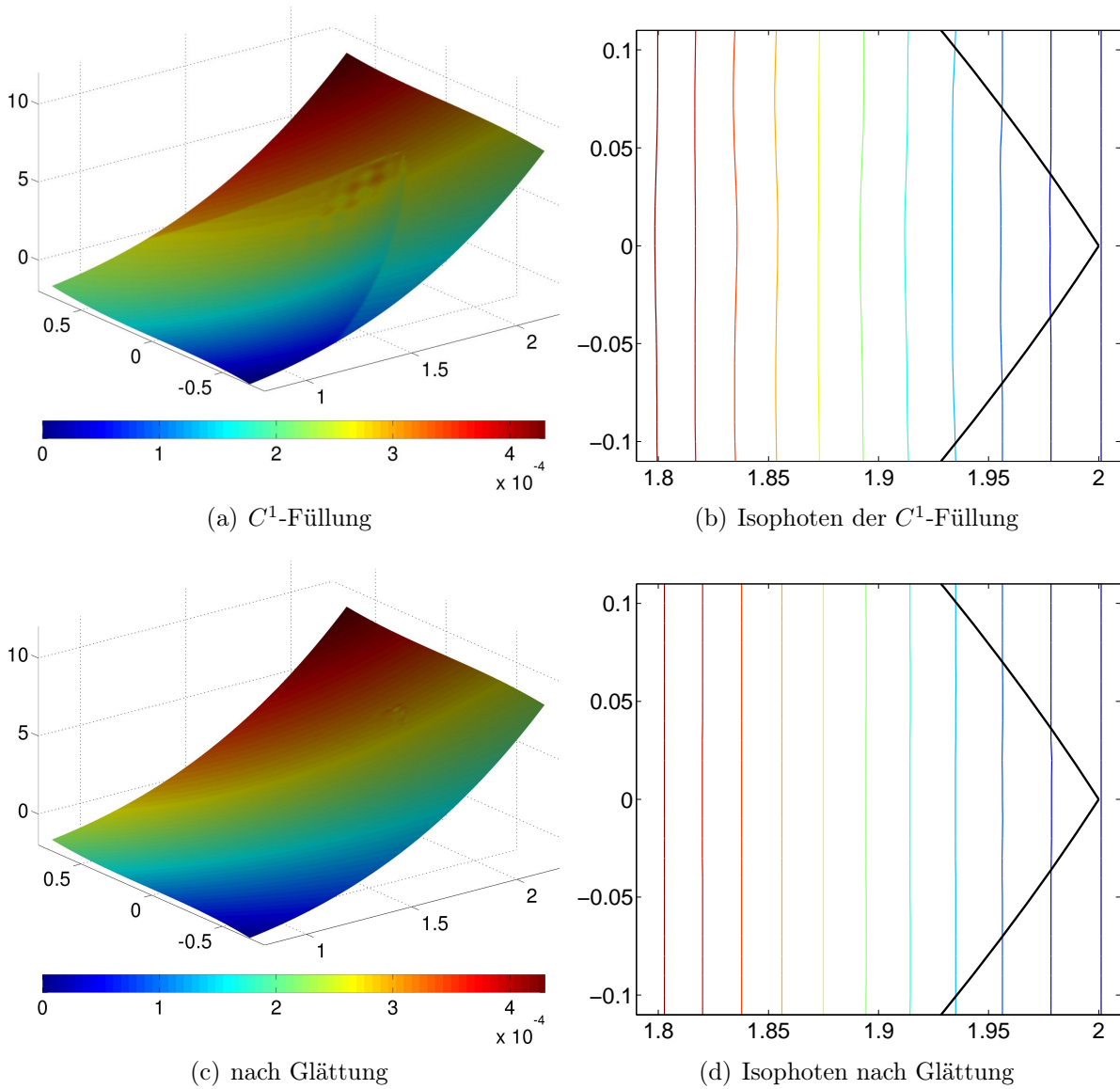


Abbildung 4.19.: Details  $C^1$ -stetige Füllung und Laplace-Glättung

Kapitel 3 sind bereits für beliebige Dimensionen geschildert. Es bleibt also, den ersten Schritt zu betrachten, das Differenzenverfahren.

Das Shortley-Weller-Verfahren kann auf beliebige Gebiete im  $\mathbb{R}^d$  erweitert werden. Die Diskretisierung des Laplace-Operators in einem Punkt ist nun statt von  $2^2$  von  $2^d$  Nachbarpunkten abhängig. Wie zuvor ist die Diskretisierungsmatrix  $L_h$  eine dünnbesetzte  $M$ -Matrix. Die Norm der Inversen ist beschränkt und wie zuvor konvergiert das Verfahren. Die hier gezeigten Beweise zur Vorkonditionierung können analog auf den  $\mathbb{R}^d$  angewandt werden, es ändern sich lediglich die Konstanten. Einzige Forderung bleibt wie bisher, dass  $\Omega$  in einer Koordinatenrichtung in einem Streifen beschränkter Dicke liegt.

Der Ansatz für die randstetige Füllung bleibt gleich. Genauso wie im Zweidimensionalen gilt es,

$$-\Delta u = 1 \text{ auf } \Omega \text{ und } u = f \text{ auf } \partial\Omega$$

zu lösen. Auch der Übergang von einer  $C^{k-1}$ -stetigen Füllung  $s_{k-1}$  zu einer  $C^k$ -stetigen Füllung erfordert keine prinzipiellen Änderungen. Der Ansatz bleibt

$$s_k = s_{k-1} + w^k \tilde{s}_k.$$

Für den Übergang ist wiederum nur eine zusätzliche neue Forderung notwendig. Diese kann ebenfalls über  $\tilde{s}_k$  formuliert werden.

In einem Punkt  $x$  auf  $\partial\Omega$  kann ein Differentialoperator der Ordnung  $k$  dargestellt werden als

$$D = \sum_{|l| \leq k} c_l \prod_{i=1}^d (D_{v_i})^{l_i},$$

wobei die Vektoren  $v_i$  eine Basis des  $\mathbb{R}^d$  bilden und  $v_1, \dots, v_{d-1}$  den Tangentialraum von  $\Omega$  in  $x$  aufspannen und  $v_d$  der Normalenvektor ist. Erneut gilt für  $l_d < k$

$$\prod_{i=1}^d (D_{v_i})^{l_i} s_k|_{\partial\Omega} = \prod_{i=1}^d (D_{v_i})^{l_i} f|_{\partial\Omega}$$

und für  $l_d = k$

$$(D_{v_d})^k f|_{\partial\Omega} = ((D_{v_d})^k s_{k-1} + (D_{v_d})^k w^k \tilde{s}_k)|_{\partial\Omega}.$$

Somit ergibt sich als Bedingung

$$\tilde{s}_k = \frac{(D_{v_d})^k (f - s_{k-1})}{k! (D_{v_d} w)^k}.$$

Diese hängt wie im  $\mathbb{R}^2$  nur von der Ableitung in Normalenrichtung ab.

Auch was die Implementierung betrifft, kommen abgesehen von der Größe der zu lösenden Systeme keine neuen Anforderungen hinzu. Lediglich bei der Implementierung

des Glättungsalgorithmus ist es notwendig, sich mit der Integration auf dreidimensionalen Gebieten zu beschäftigen, was eine Herausforderung darstellt. Implementiert wurde bisher ein Algorithmus, der für ein polyedrisches Gebiet eine Gewichtsfunktion berechnet.

# Fazit und Ausblick

Zentrales Thema dieser Arbeit sind Zwei-Schritt-Approximationsalgorithmen mit erweiterten B-Splines. Diese Abhandlung zeigt, dass stabile Zwei-Schritt-Verfahren der Ordnung  $n$  eine Approximationsgüte der Ordnung  $\mathcal{O}(h^n)$  besitzen. Gleiches gilt auch für stabile globale Methoden. Damit ist für die erweiterten Splines neben ihrer Verwendung im Bereich der Finite-Elemente-Methode das Anwendungsgebiet der Approximation erschlossen.

Bei der Approximation gestreuter Daten ist die Stabilität der Verfahren von der Datendichte abhängig. Die hergeleiteten theoretischen Resultate beschränken sich dabei auf dichte Daten, verrauschte und dünne Daten wurden nicht untersucht. Die theoretischen Ergebnisse beziehen sich auf die Approximation von Funktionen aus Sobolev-Räumen. Die hier präsentierten Methoden besitzen gute, mit denen der gitterlosen Verfahren vergleichbare Fehlerabschätzungen. Hinzu kommen die Vorteile von Verfahren mit Tensorprodukt-B-Splines: Die einfache Struktur, welche hohe Glattheit und einfache Auswertungsmechanismen in beliebigen Dimensionen erlaubt, die geringe Anzahl an Freiheitsgraden im Splineraum und die Lokalität der Basis. Der große Nachteil von Splineverfahren auf Gebieten, die Randartefakte, können durch die Erweiterung effizient vermieden werden. Die gewichtete Least-Squares-Approximation ermöglicht darüber hinaus einen effizienten Umgang mit ungleichmäßig verteilten Daten. Gerade bei drei- oder höher-dimensionalen Anwendungen bietet die gute Parallelisierbarkeit der Zwei-Schritt-Methoden einen Vorteil gegenüber globalen Methoden.

Ein interessante offene Frage ist, ob sich die Ergebnisse auf verrauschte Daten übertragen lassen. Hier steht das  $k$ -Funktional als vielversprechendes Mittel zur Verfügung. Alle untersuchten Verfahren scheinen auch auf web-Splines übertragbar. Es sind Approximationsszenarien denkbar, bei denen es von besonderer Bedeutung ist, am Rand Bedingungen einzuhalten. Ein Beispiel kann ein dreidimensionales Tiefenmodell für Ozeane mit der Tiefe Null an der Küstenlinie bilden. Die Verwendung von Gewichtsfunktionen garantiert dabei die Einhaltung dieser Randbedingung.

Eine weitere dargestellte Anwendung ist das Hole-Filling. Der wesentliche Vorteil der Zwei-Schritt-Algorithmen mit erweiterten B-Splines ist die Anwendbarkeit auf beliebige Gebiete – im Unterschied zu der bisher weit verbreiteten Beschränkung auf polygonale Lücken. Auch ist der iterative Ansatz, bei dem die Füllungen in jeder Stufe an Glattheit gewinnen, effizient. Der Ansatz erlaubt die Konstruktion wasserdichter Füllungen. Die hier präsentierten numerischen Verfahren sind jedoch approximativ, sodass die Übergänge nicht im herkömmlichen Sinne wasserdicht sind. Betrachtet man

die Fertigungstoleranzen in der industriellen Anwendung, ist die Genauigkeit der Approximation jedoch ausreichend groß. Im Gegensatz zu Subdivisionsalgorithmen sind die Verfahren nicht auf  $C^2$ - oder gar  $C^1$ - stetige Füllungen beschränkt und sind im Inneren stets von gewünschter Glattheit. Durch den iterativen Ansatz sind diverse Möglichkeiten gegeben, um die Glattheit der Flächen durch zusätzliche Glättung zu verbessern.

Die Möglichkeit Gewichtsfunktionen automatisiert zu berechnen, ist ein wichtiger Schritt für die praktische Anwendbarkeit der web-Spline-Methoden. Der zweistufige Hole-Filling-Algorithmus ist bisher für den  $\mathbb{R}^2$  implementiert. Einer mehrdimensionalen Umsetzung stehen aber bis auf den erhöhten Speicherbedarf keine weiteren grundsätzlichen Hindernisse im Weg. Somit ist es möglich, automatisiert trivariate Gewichtsfunktionen zu berechnen.

In jedem Fall besteht Bedarf an der Konstruktion adaptiver Algorithmen. Hier wird ein Schwachpunkt der web- und eb-Splines deutlich: Konstruiert man die entsprechenden hierarchischen Splineräume, so sind diese nicht geschachtelt. Dies liegt daran, dass sich die Ankopplungen bei verschiedenen Gitterweiten unterscheiden. Trotzdem sind hierarchische Ansätze bekannt und unvermeidbar im Kontext der Approximation dünner Daten sowie im Bereich der Finite-Elemente-Methode. Ein nächster Schritt sollte sein, diese Adaptivität im Rahmen der Approximation gestreuter Daten zu untersuchen und umzusetzen.



# A. Anhang

## A.1. Funktionenräume

Es wird ein offenes, zusammenhängendes Gebiet  $\Omega \in \mathbb{R}^d$  betrachtet, auf dem diverse Funktionenräume definiert sind. Hier eine kurze Übersicht über die verwendeten Funktionenräume und die in diesen definierten Normen bzw. Seminormen.

**Definition A.1.1** *Es sei*

$$\mathcal{L}^p(\Omega) := \{f : \Omega \rightarrow \mathbb{R} \mid f \text{ ist messbar und } \int_{\Omega} |f|^p \, d\mu < \infty\}.$$

*Durch*

$$\|f\|_{\mathcal{L}^p(\Omega)} := \left( \int_{\Omega} |f|^p \, d\mu \right)^{1/p}$$

*wird eine Halbnorm auf  $\mathcal{L}^p(\Omega)$  definiert. Der Kern des Operators  $\|\cdot\|_{\mathcal{L}^p(\Omega)}$  sei gegeben durch*

$$N^p(\Omega) := \{f \in \mathcal{L}^p(\Omega) \mid \|f\|_{\mathcal{L}^p(\Omega)} = 0\}.$$

*Der Lebesgue-Raum*

$$L^p(\Omega) := \mathcal{L}^p(\Omega) / N^p(\Omega)$$

*ist ein Banach-Raum mit der Norm*

$$\|f\|_{L^p(\Omega)} := \left( \int_{\Omega} |f|^p \, d\mu \right)^{1/p}.$$

In Lebesgue-Räumen gilt unter anderem die Hölder-Ungleichung:

**Lemma A.1.2** *Es sei  $1 \leq p \leq \infty$  und  $f \in L^p(\Omega)$ ,  $g \in L^{p'}(\Omega)$ . Dann ist  $fg \in L^1(\Omega)$  und*

$$\|fg\|_{L^1(\Omega)} \leq \|f\|_{L^p(\Omega)} \|g\|_{L^{p'}(\Omega)},$$

*wobei  $p'$  zu  $p$  konjugierter Hölder-Exponent heißt und  $1/p + 1/p' = 1$  gelte. Außerdem seien  $\infty$  und 1 zueinander konjugierte Exponenten.*

Mit Hilfe von partieller Integration lässt sich der klassische Ableitungsbegriff verallgemeinern.

**Definition A.1.3** Für den Multiindex  $\alpha \in \mathbb{N}^d$  und  $f, g \in L^1(\Omega)$  ist  $g$  die schwache Ableitung der Ordnung  $\alpha$  der Funktion  $f$ , falls für alle Testfunktionen  $\varphi \in C^\infty(\Omega)$

$$\int_{\Omega} f \varphi^{(\alpha)} dx = (-1)^{|\alpha|} \int_{\Omega} g \varphi dx$$

gilt.

Dies reicht, um Sobolev-Räume einzuführen:

**Definition A.1.4** Das Funktional  $\|\cdot\|_{W_p^m(\Omega)}$  mit  $m \in \mathbb{N}$  und  $1 \leq p \leq \infty$  sei gegeben als

$$\|f\|_{W_p^m(\Omega)} := \left( \sum_{|\alpha| \leq m} \|f^{(\alpha)}\|_{L^p(\Omega)}^p \right)^{1/p}, \quad p < \infty,$$

beziehungsweise

$$\|f\|_{W_\infty^m(\Omega)} := \max_{|\alpha| \leq m} \|f^{(\alpha)}\|_{L^\infty(\Omega)}.$$

Es definiert eine Norm auf den Banach-Raum  $W_p^m(\Omega)$

$$W_p^m(\Omega) := \{f \in L^p(\Omega) \mid f^{(\alpha)} \in L^p(\Omega) \text{ für } 0 \leq |\alpha| \leq m\}.$$

Dieser wird Sobolev-Raum genannt.

Daneben gibt es eine nur über die höchsten schwachen Ableitungen definierte Sobolev-Seminorm:

**Definition A.1.5** Das Funktional  $|\cdot|_{W_p^m(\Omega)}$  gegeben als

$$|f|_{W_p^m(\Omega)} := \left( \sum_{|\alpha|=m} \|f^{(\alpha)}\|_{L^p(\Omega)}^p \right)^{1/p}, \quad p < \infty,$$

beziehungsweise

$$|f|_{W_\infty^m(\Omega)} := \max_{|\alpha|=m} \|f^{(\alpha)}\|_{L^\infty(\Omega)}$$

ist die sogenannte Sobolev-Seminorm auf  $W_p^m(\Omega)$ .

Es gilt folgende Normäquivalenz:

**Lemma A.1.6** Für  $f \in W_p^m(\Omega)$  sind die Normen

$$(|f|_{W_p^m(\Omega)} + \|f\|_{L^p(\Omega)}) \text{ und } \|f\|_{W_p^m(\Omega)}$$

äquivalent.

Weiterhin wird vom Sobolev-Einbettungssatz Gebrauch gemacht, genauer gesagt von der folgenden Einbettung:

**Lemma A.1.7** Wenn  $\Omega$  ein Lipschitz-Gebiet ist und  $mp > d$ , dann existiert die Einbettung

$$W_p^m(\Omega) \hookrightarrow C^0(\Omega),$$

und ist kompakt. Somit existiert eine Einbettungskonstante  $c$ , für die

$$\|f\|_{C^0(\Omega)} \leq c \|f\|_{W_p^m(\Omega)}$$

gilt.

Weitere Details finden sich unter anderem in [1, 8] und [26].

## A.2. Gauß-Seidel-Verfahren

Das Gauß-Seidel-Verfahren ist ein einfacher iterativer Prozess zum nähernden Lösen eines linearen Gleichungssystems. Es sei

$$Ax = b$$

das zu lösende Gleichungssystem in  $n$  Variablen. Es sei  $M$  die untere Dreiecksmatrix von  $A$ .

Das Verfahren beginnt mit einem „geschätzten“ Startwert  $x_0$ . Zu einem gegebenen  $x_k$  wird die nächste Iterationsstufe wie folgt berechnet: Zuerst wird  $z_k$  berechnet, wobei gilt

$$r_k := b - Ax_k \text{ und } z_k \text{ löst } Mz_k = r_k,$$

Dann setzt man

$$x_{k+1} := x_k + z_k.$$

Der Fehler  $e_k := A^{-1}b - x_k$  nach  $k$  Iterationen ist durch

$$\|e_k\| = \|(I - M^{-1}A)^k\| \|e_0\|$$

beschränkt. Dies bedeutet, dass das Verfahren konvergiert, falls der Spektralradius  $\rho(I - M^{-1}A) < 1$  ist.

Das Gauß-Seidel-Verfahrens erlaubt es, die einzelnen Komponenten von  $x_k$  getrennt zu berechnen. Dies ist bei großen linearen Gleichungssystemen interessant, da es eine blockweise Implementierung ermöglicht.

## A.3. Weitere Beispiele für das Hole-Filling

Hier sind zwei weitere Beispiele für das in Kapitel 4 vorgestellte Verfahren zum Hole-Filling-Problem gegeben. Diese werden im Folgenden mit Beispiel 1 und Beispiel 2 bezeichnet.

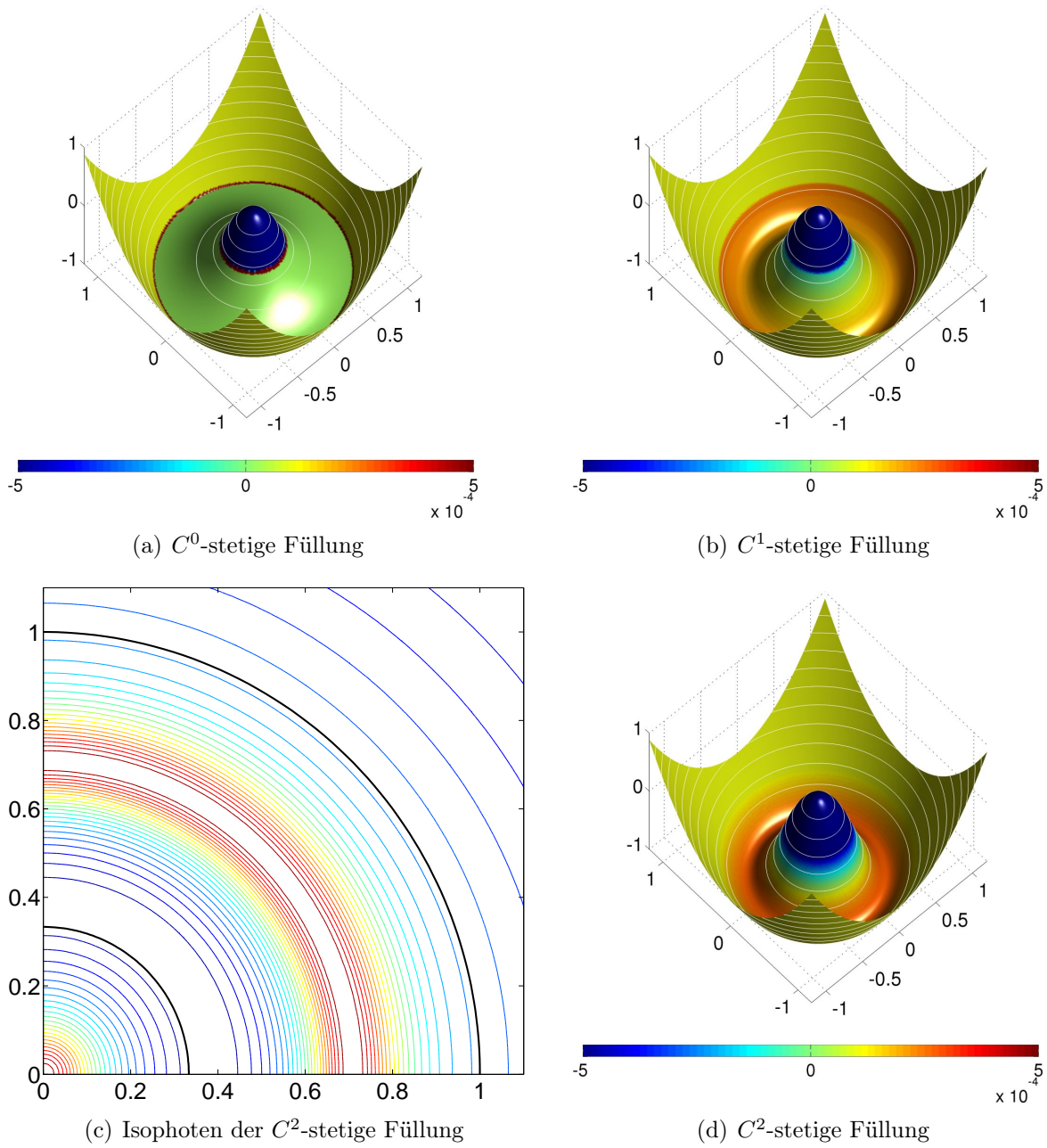
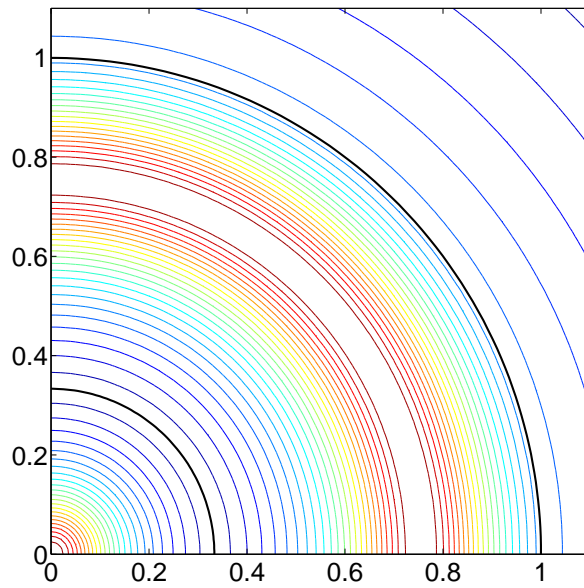
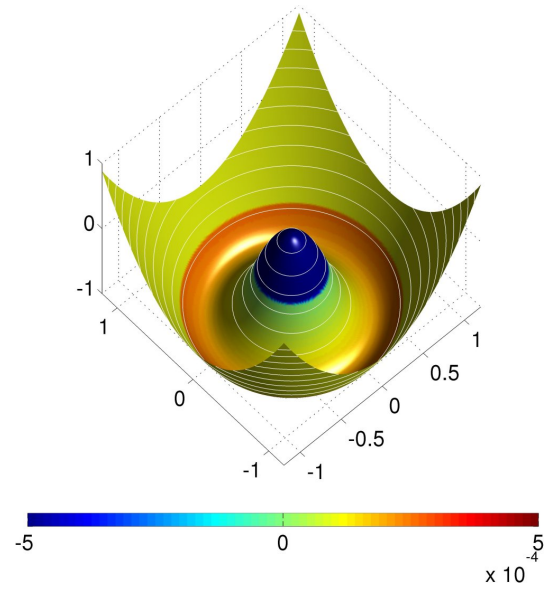


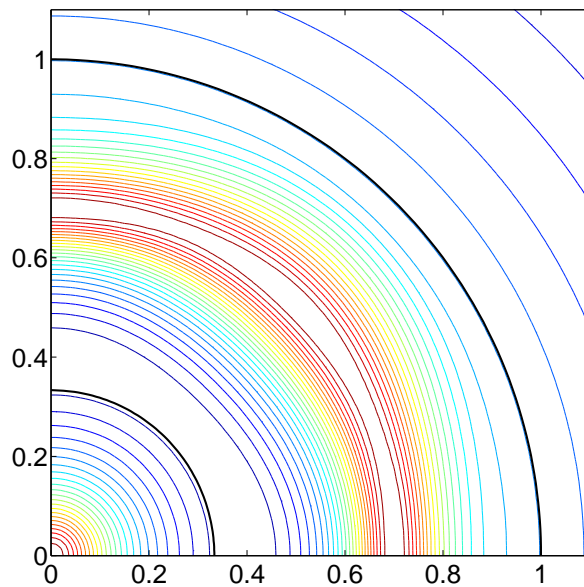
Abbildung A.1.: Beispiel 1, Füllungen



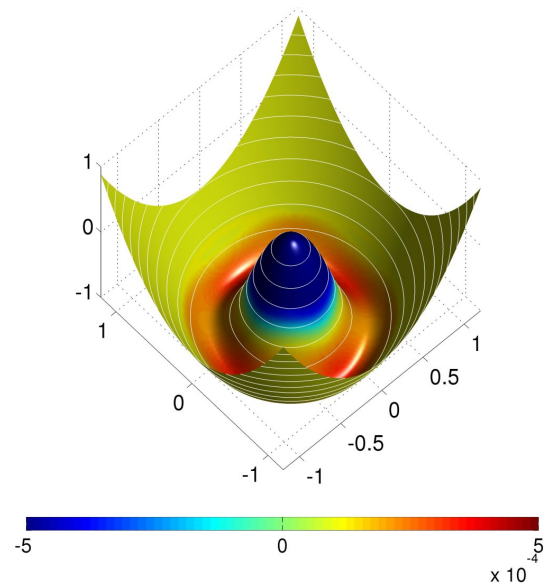
(a) Isophoten nach Laplace-Glättung



(b) Fläche nach Laplace-Glättung



(c) Isophoten nach Glättung dritter Ordnung



(d) Fläche nach Glättung dritter Ordnung

Abbildung A.2.: Beispiel 1 nach Glättung

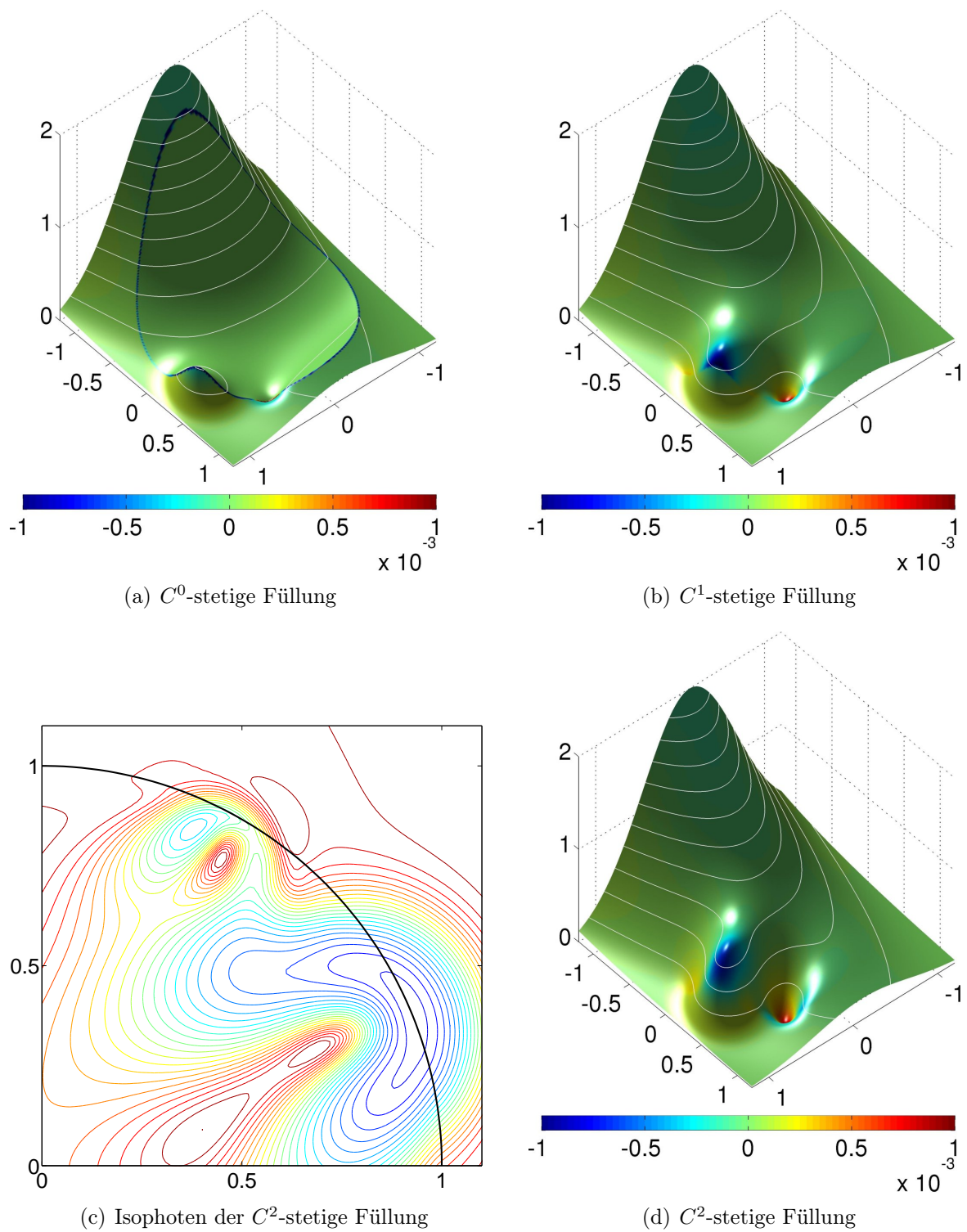
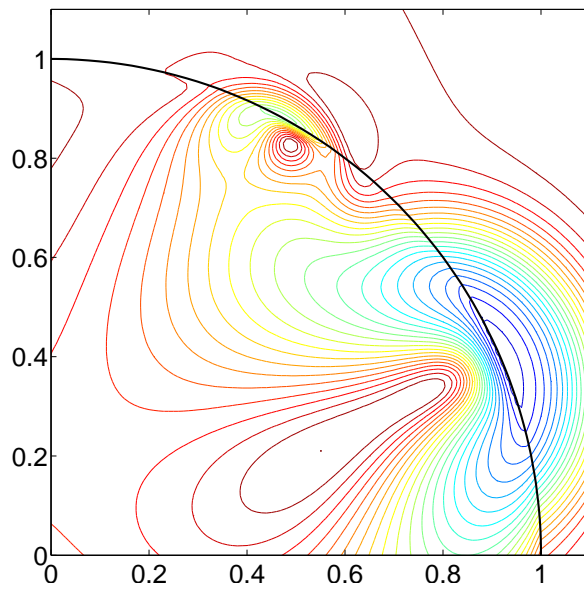
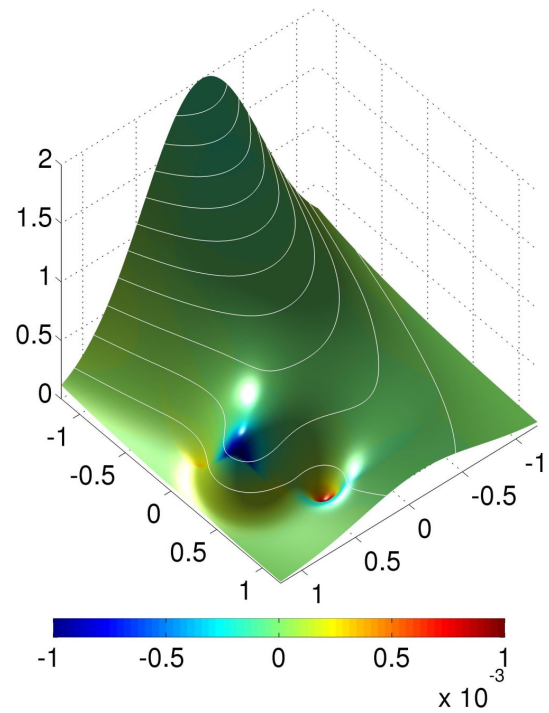


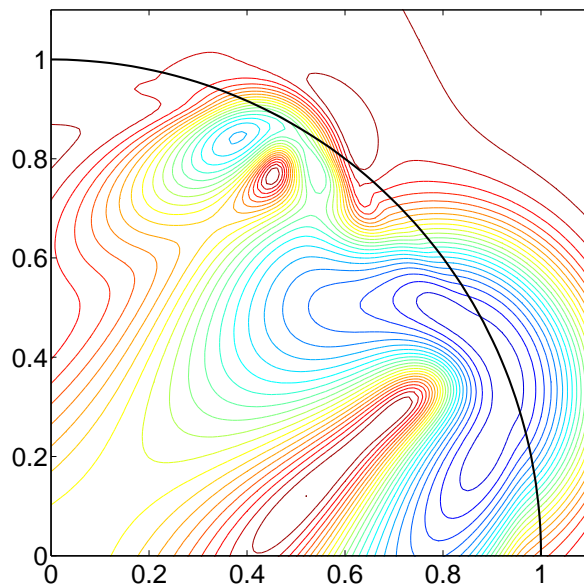
Abbildung A.3.: Beispiel 2, Füllungen



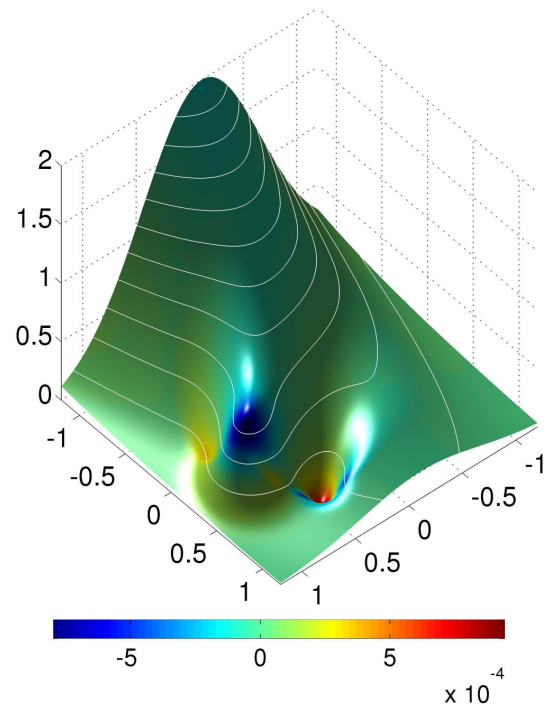
(a) Isophoten nach Laplace-Glättung



(b) Fläche nach Laplace-Glättung



(c) Isophoten nach Glättung dritter Ordnung



(d) Fläche nach Glättung dritter Ordnung

Abbildung A.4.: Beispiel 2 nach Glättung

Beispiel 1 wurde bereits erwähnt; das Gebiet  $\Omega$  ist hier ein Kreisring

$$\Omega = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid 1/3 < \|x\|_2 < 1\}.$$

Die außerhalb des Rings gegebene Funktion  $f$  ist zweigeteilt

$$f(x,y) = \begin{cases} -5(x^2 + y^2) & \|x\|_2 \leq 1/3 \\ -2 + x^2 + y^2 & \|x\|_2 \geq 1 \end{cases}.$$

In Beispiel 2 ist das Gebiet eine Kreisscheibe

$$\Omega = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid \|x\|_2 < 1\}.$$

Die außerhalb des Rings gegebene Funktion  $f$  ist die Franke-Funktion

$$\begin{aligned} f(x,y) = & \frac{3}{4}e^{-((9x-2)^2+(9y-2)^2)/4} + \frac{3}{4}e^{-(9x+1)^2/49+(9y+1)/10} \\ & + \frac{1}{2}e^{-((9x-7)^2+(9y-3)^2)/4} - \frac{1}{5}e^{-(9x-4)^2+(9y-7)^2}. \end{aligned}$$

Bei beiden Versuchen hat das Differenzengitter die Gitterweite  $h_D = 1/128$ . Approximiert wird in einem Splineraum mit der Gitterweite  $h_A = 1/32$  und der Ordnung  $n = 4$ . In diesem Funktionenraum werden die Gewichtsfunktion und die einzelnen Bestandteile der Füllungen berechnet. Für die glättenden Terme wird ein erweiterter Splineraum mit Gitterweite der  $h = 64$  und der Ordnung  $n = 4$  verwandt. Die ersten drei Stufen der Füllungen sind in Abbildung A.1 für Beispiel 1 und Abbildung A.3 für Beispiel 2 dargestellt. Es wird bezüglich der beiden vorgestellten Energiefunktionen  $E_1$  und  $E_2$  minimiert. Abbildungen A.2 und A.4 zeigen die Ergebnisse für beide Beispiele.

## A.4. Programmpaket

Alle Beispiele dieser Arbeit sind mit Hilfe von Matlab-Programmen berechnet. Dabei wird auf ein Programmpaket von Bernhard Mößner zurückgegriffen [45], das die Auswertung von web-Splines sowie die Initialisierung einer web-Spline-Struktur bei vorgegebenen Gebiet ermöglicht. Die hinzugefügten Programme ermöglichen es

- erweiterte Splines als Gewichtsfunktionen zu verwenden,
- Poisson-Gleichungen mit konstanter rechter Seite über das Gauß-Seidel-Verfahren zu lösen,
- gestreute Daten zu approximieren,
- durch Kombination von Differenzenverfahren und Approximation  $C^k$ -stetige Füllungen zu berechnen, um so unter anderem Gewichtsfunktionen zu berechnen,
- vorhandenen Füllungen zu glätten,
- Füllungen auszuwerten und graphisch darzustellen.



### A.4.1. web-Spline-Struktur

Die web-Spline-Struktur ist weitgehend aus bestehenden Programmen übernommen. Die komplette zu einer Konfiguration aus Gebiet, Splinegitter und Splinegrad gehörende Information wird in einer Variablen gespeichert. Eine Übersicht über deren Felder:

Web.B	=	Randkurve als Bezierkurve
Web.X, Web.Y	=	Knotenvektoren
Web.N	=	Ordnung der B-Splines
Web.IZ	=	Index der inneren Zellen
Web.RZ	=	Index der Randzellen
Web.KP, Web.KP2	=	Koordinaten der kritischen Punkte
Web.KSI	=	Kurven-Segment-Index
Web.U	=	Verschiebung des Gitters
Web.S	=	Ankopplungsinformationen (siehe unten)

Die Randkurve wird als gewichtete Splinekurve übergeben; diese kann aus einzelnen Segmenten verschiedener Ordnung bestehen. Gespeichert werden die Kontrollpunkte in einer vereinheitlichten Ordnung im Format [ X1 Y1 W1 ... Xk Yk Wk ].

Bei der Erzeugung der Spline-Struktur werden weiterhin die Verschiebung U bezüglich des Ursprungs, die Gitterweite h, die Splineordnung N - ein zweidimensionaler Array - und die Gewichtsfunktion W übergeben.

Bei der Ankopplung ist es notwendig, die kritischen Punkte zu berechnen, d.h. die Schnitte zwischen Randkurve und Gitter und die Endpunkte der einzelnen Bezierkurven. Außerdem werden für diese Schnittpunkte die Segmente der Bezierkurve gespeichert, auf der sie sich befinden. Mit diesen Informationen werden die inneren und äußeren Gitterzellen berechnet und entsprechend des durch Web.X, Web.Y gegebenen Gitters indiziert gespeichert.

Die Ankopplungsinformationen werden in einem Cell-Array gespeichert, da es so möglich ist, verschiedene Ankopplungen für eine Gitter-Gebiet-Konstellation zu speichern.

Die Felder von Web.S{i} betreffen die Erweiterungskonstruktion:

W	=	Gewichtsfunktion bei gewichteten erweiterten Splines (1 für erweiterte Splines)
I	=	Index innere Splines
J	=	Index äußere Splines
M	=	Ankopplungsmatrix

Die Indizes der inneren Splines I und äußeren Splines J geben jeweils die unteren linken Gitterzellen der Träger an. Die Ankopplungsmatrix M hat so viele Zeilen wie innere Splines und so viele Spalten wie insgesamt Splines auf dem Gitter existieren. Die Matrixeinträge sind die Ankopplungskoeffizienten. Es gibt drei Arten von Spalten: Die zu inneren Splines gehörenden Spalten haben einen von Null verschiedenen Eintrag in der entsprechenden Zeile. Die zu äußeren Splines gehörenden Spalten enthalten  $n^2$  von Null verschiedene Einträge bei den inneren Splines, an die sie angekoppelt werden. Alle Splines, die das Gebiet nicht schneiden, haben keine von Null verschiedenen Einträge.

Diese Speicherung ermöglicht einen einfachen Umgang mit der Erweiterung. Matrizen wie die Galerkin- oder die Grammsche-Matrix werden für alle Splines des Gebiets aufgestellt und danach durch Multiplikation mit  $M$  bzw.  $M'$  in eine Darstellung bezüglich der erweiterten Basis transformiert.

#### A.4.2. Shortley-Weller-Differenzenverfahren

Die Hauptfunktion zum Aufstellen und Lösen des Gleichungssystems der Poisson-Gleichung ist `web_GetWeigth_nonzero`. Die zu übergebenden Parameter sind:

<code>Web</code>	=	web-Spline-Struktur
<code>NumberRefSteps</code>	=	Anzahl der Verfeinerungsschritte bzgl. des Splinegitters
<code>NumberIterations</code>	=	Iterationsschritte für die Gauß-Seidel-Glättung
<code>tol</code>	=	Toleranz zur Bestimmung innerer Punkte
<code>Outputflag</code>	=	graphische Ausgabe (0=nein, 1=ja)
<code>bndfunc</code>	=	gegebene Randfunktion (function handle)
<code>const</code>	=	rechte Seite der Poisson-Gleichung
<code>direct</code>	=	direktes Lösen oder iteratives Verfahren

Es werden mehrere Unterprogramme aufgerufen:

<code>getInner3</code>	=	Berechnung der inneren Gitterpunkte
<code>getSmallValues</code>	=	Übertragung vom feinen auf gröberes Gitter
<code>getEquation</code>	=	Aufstellen des Gleichungssystems mit Übernahme und Interpolation der Startwerte
<code>SeidelIt</code>	=	Gauß-Seidel Glättung

Zuerst werden die inneren Gitterpunkte und Gitter-Rand Schnittpunkte für das feinste Gitter berechnet (`getInner3`). Zusammen mit jedem Schnittpunkt werden der nächste innere Gitterpunkt und die Schnittrichtung gespeichert. Im Falle des iterativen Ansatzes können die inneren Gitterpunkte und Schnittpunkte für die gröberen Gitter aus denen des feinen Gitters generiert werden (`getSmallValues`). Im Falle der direkten Lösung wird mittels der Funktion `getEquation` für das feinste Gitter die Diskretisierungsmatrix  $A$  und die rechte Seite  $b$  berechnet, im indirekten Fall wird das größte Gitter verwandt. Beide Systeme werden mittels Matlab direkt gelöst. Wegen der speziellen Struktur wird das Gleichungssystem vorher nach der Diagonalen vorkonditioniert. Bei dem iterativen Ansatz werden die so erhaltenen Werte als Startwerte für das nächst feinere Gitter der Funktion `getEquation` übergeben. Neben  $A$  und  $b$  wird in diesem Fall mittels Interpolation noch ein Startwert  $x$  für alle Gitterpunkte berechnet. Das Gleichungssystem wird an die Funktion `SeidelIt` übergeben, die eine vorher festgelegte Anzahl von Iterationen des Glättungsalgorithmus durchführt. Der Parameter `NumberRefSteps` bestimmt, wie oft dieser Prozess wiederholt wird. So wird eine approximative Lösung auf dem feinen Gitter berechnet. Diese Werte werden samt dem Gitter im Rückgabeparameter `FD` gespeichert:

FD.X,FD.Y = Knotenvektoren des Differenzengitters  
FD.Val = Matrix mit Datenwerten auf dem Gitter  
FD.isVal = gibt an, welche Datenpunkte im Inneren liegen  
FD.NP = Schnittpunkte von Gitter und Randkurve

### A.4.3. Zwei-Schritt-Approximationsverfahren

Die Approximationsverfahren sind im Programm `ScatteredLocalLeastSquare` zusammengefasst. Die Parameter werden nicht alle für die verschiedenen Konfigurationen gebraucht, weshalb hier nur die wichtigsten drei aufgeführt sind:

Web = web-Spline-Struktur  
setting = die gewählte Methode  
k, o = Größe der lokalen Gebiete in  $x$ - und  $y$ - Richtung

Die wichtigen Unterprogramme sind:

LeastLocalSquare = Least Squares Matrix aufstellen  
changeLocalWeb, changeLocalWeb2 = Zellen zu äußeren Zellen verwandeln

Die Funktion `ScatteredLocalLeastSquare` implementiert die Zwei-Schritt-Approximationsmethode. Der Parameter `setting` gibt die Methode an. Es stehen mehrere Varianten zur Auswahl:

- Bei dem globalen Verfahren (`setting=2, o,k=NaN`) wird mittels der `LeastLocalSquare` Funktion das Least-Squares-Verfahren für das gesamte Gebiet aufgestellt. Nach diagonalen Vorkonditionierung wird es mittels Matlab-eigener Routinen direkt gelöst.
- Bei der lokalen Methode (`setting=2,o,k=integer`) spielen weitere Parameter eine Rolle: `k`, `o` geben die Anzahl der Gitterzellen in  $x$ -, respektive  $y$ -Richtung an aus denen ein lokales Gebiet bestehen soll. Für jeden inneren Spline wird ein rechteckiges um den Trägermittelpunkt zentriertes lokales Gebiet gewählt. Bezüglich dieses Gebiets wird erweitert und in dem korrespondierenden Splineraum mittels `LeastLocalSquare` approximiert. Wenn das daraus resultierende Gleichungssystem schlecht konditioniert ist, können die lokalen Gebiete mittels `changeLocalWeb` vergrößert werden. Danach wiederholt sich die Erweiterungs- und Approximationsprozedur. Alternativ können mittels `changeLocalWeb2` neue Ankopplungen hinzugefügt werden. Dabei werden die Splines mit den kleinsten Diagonaleinträgen gesucht und alle Zellen in deren Träger werden zu äußeren Zellen. Dies reduziert die Anzahl der Freiheitsgrade. Diese iterativen Prozesse werden über diverse Parameter kontrolliert. Im Fall dichter Daten sind sie nicht notwendig, deswegen werden sie hier nicht weiter erläutert.

Die voreingestellte und für die hier präsentierten Beispiele verwendete lokale Methode (`setting=3`) wählt zu jedem inneren Spline ein lokales Gebiet, welches aus dessen

Träger und einem Ring von  $2 \times n$  Gitterzellen besteht. Der Rest des Verfahrens läuft analog zum oben beschriebenen.

Rückgabeparameter des Programms `ScatteredLocalLeastSquare` ist ein Koeffizientenvektor zu der eingegebenen web-Struktur.

#### A.4.4. Hole-Filling

Im Programm `web_Weight_nonzeroDemo` werden die beiden obigen Komponenten zu einem  $C^2$  Hole-Filling-Algorithmus kombiniert. Es werden die nötigen Randfunktionen und mögliche Glättungen berechnet. Die Eingabeparameter sind:

<code>numberRef</code>	=	Verfeinerungsschritte für Differenzenverfahren
<code>functionnumber</code>	=	verschiedene Funktionen, für die Funktion und Ableitung definiert wurden (1-7)
<code>Outputflag</code>	=	graphische Ausgabe (0=nein, 1=ja)
<code>tol</code>	=	Toleranz für Differenzenverfahren
<code>n</code>	=	Splineordnung
<code>h</code>	=	Gitterweite Splinегitter
<code>U</code>	=	Verschiebung Splinегitter
<code>Bnd</code>	=	Randkurve

Das Programm besteht aus einem Initialisierungsteil sowie mehreren ähnlichen Blöcken, in denen die jeweils nächstglattere Füllung konstruiert wird. Dazu kommt ein Teil in dem verschiedene Glättungsalgorithmen validiert werden.

Das Programm `web_Weight_nonzeroDemo` dient der Erstellung von Beispielen. Die Ausgabeparameter sind:

<code>Web</code>	=	Array von web-Strukturen
<code>Fehler</code>	=	Fehler der Funktion und der Ableitung am Rand
<code>A_array</code>	=	Koeffizienten für die erweiterten Splines

Nach der Initialisierung der web-Struktur wird zuerst eine  $C^0$ -Füllung berechnet. Dazu wird mittels des Programms `web_GetWeigth_nonzero` auf einem Differenzengitter die Poisson-Gleichung mit rechter Seite  $-1$  und der gegebenen Randfunktion gelöst. Zu den zurückgegebenen Punkten kommen etwa gleich viele Punkte auf dem Rand des Gebiets, für die der Funktionswert bekannt ist. Diese gestreute Daten werden dann mittels `ScatteredLocalLeastSquare` approximiert. Dabei wird die lokale Variante ohne weitere Ankopplungen verwendet. Resultat ist ein Koeffizientenvektor. Mit diesem und der web-Struktur kann die Füllung an beliebigen Punkten ausgewertet werden.

Auf ähnliche Weise wird eine Gewichtsfunktion berechnet; dabei wird als rechte Seite die konstante Einsfunktion und als Randfunktion die Nullfunktion verwendet.

In zwei weiteren Schritten folgt die Berechnung der Koeffizienten für die  $C^1$ - und die  $C^2$ -Füllung. Zuvor müssen die Randfunktionen berechnet werden; diese hängen von der Gewichtsfunktion und den anderen Füllungen ab. Sie werden der Prozedur so übergeben, dass diese sie punktweise auswerten kann.

Zuletzt werden verschiedene Glättungsverfahren getestet. Den Funktionen `LaplaceSquareFair` und `ThirdOrderFair` werden dazu die web-Struktur, über die minimiert werden soll, und die Auswertungsfunktionen für die Füllungen übergeben. Auch hier wird der Koeffizientenvektor des eb-Splines zurückgegeben. Alle Koeffizienten werden im Array `A_array` gespeichert. Zusätzlich wird der maximale Fehler der  $C^2$ -Füllung am Gebietsrand und der maximale Fehler der ersten partiellen Ableitungen entlang des Randes berechnet. Diese werden im Array `Fehler` zurückgegeben.

### A.4.5. Darstellung

Die Ergebnisse der Füllung können mit `inp_flaeche3` und `inp_flaeche4` visualisiert werden. Übergeben wird der Routine `inp_flaeche3` die web-Struktur und die Koeffizienten `A1`, `A2`, `A3` der einzelnen Bestandteile der Füllung, sowie die Koeffizienten `AW` der Gewichtsfunktion. Geplottet werden dann die  $C^0$ -,  $C^1$ - und die  $C^2$ -Füllung, sowie die Isophoten. Dazu werden die Splines auf einem Gitter mit Gitterweite  $1/20$  ausgewertet. Die Routine `inp_flaeche4` gibt darüber hinaus noch die geglätteten Splines aus, wobei eine zweite web-Struktur, zum Beispiel mit anderer Gitterweite, übergeben werden kann.

Das Programm `web_plot3` dient dazu, web-Spline-Strukturen zu visualisieren. Es gibt verschiedene Möglichkeiten, die beliebig kombiniert werden können:

- 1 = Splinegitter
- 2 = Klassifizierung in innere und äußere Zellen
- 3 = Ausgabe Randkurve
- 4 = kritische Punkte
- 5 = Träger
- 6 = Ankopplung
- 8 = Gewichtsfunktion
- 9 = Fehler am Rand
- 10 = Nullstellen

Sie werden als Array `modus` übergeben, des Weiteren muss die web-Struktur `Web` und die Nummer der aktiven Erweiterung `Web.S` übergeben werden. Dieses Programm dient hauptsächlich der Überprüfung der verschiedenen Ankopplungen.



# Literaturverzeichnis

- [1] R.A. Adams and J.J.F. Fournier. *Sobolev Spaces, 2nd Edition*. Academic Press, 2003.
- [2] I. Babuška. The finite element method with penalty. *Mathematics of Computation*, 27(122):221–228, 1973.
- [3] I. Babuška. The finite element method with Lagrangian multipliers. *Numer. Math.*, 20:179–192, 1973.
- [4] I. Babuška and G.N. Gatica. On the mixed finite element method with Lagrange multipliers. *Numerical Methods for Partial Differential Equations*, 19(2), 2003.
- [5] R. Bagnara. A unified proof for the convergence of Jacobi and Gauss-Seidel methods. *SIAM Review*, 37(1):93–97, 1995.
- [6] F. Bernardini, J. Mittleman, H. Rushmeier, C. Silva, G. Taubin, and Y. Heights. The ball-pivoting algorithm for surface reconstruction. *IEEE Transactions on Visualization and Computer Graphics*, 5(4):349–359, 1999.
- [7] J.H. Bramble and S.R. Hilbert. Estimation of Linear Functionals on Sobolev Spaces with Application to Fourier Transforms and Spline Interpolation. *SIAM Journal on Numerical Analysis*, 7:112, 1970.
- [8] V.I. Burenkov. *Sobolev Spaces on Domains*. BG Teubner Gmbh, 1998.
- [9] C.K. Chui and M.J. Lai. Filling polygonal holes using  $C^1$  cubic triangular spline patches. *Computer Aided Geometric Design*, 17(4):297–307, 2000.
- [10] U. Clarenz, U. Diewald, G. Dziuk, M. Rumpf, and R. Rusu. A finite element method for surface restoration with smooth boundary conditions. *Computer Aided Geometric Design*, 21(5):427–446, 2004.
- [11] O. Davydov. Stable local bases for multivariate spline spaces. *Journal of Approximation Theory*, 111(2):267–297, 2001.
- [12] O. Davydov. On the approximation power of local least squares polynomials. In I.J. Anderson J. Levesley and J.C. Mason, editors, *Algorithms for Approximation IV*, pages 346–353. University of Huddersfield, UK, 2002.

- [13] O. Davydov, R. Morandi, and A. Sestini. Local RBF approximation for scattered data fitting with bivariate splines. *Trends and Applications in Constructive Approximation*, pages 91–102, 2005.
- [14] O. Davydov, R. Morandi, and A. Sestini. Local hybrid approximation for scattered data fitting with bivariate splines. *Computer Aided Geometric Design*, 23(9):703–721, 2006.
- [15] O. Davydov, J. Prasiswa, and U. Reif. Two-step-methods with extended splines. (preprint).
- [16] O. Davydov and F. Zeilfelder. Scattered data fitting by direct extension of local polynomials to bivariate splines. *Adv. Comput. Math.*, 21(3-4):223–271, 2004.
- [17] C. de Boor. The quasi-interpolant as a tool in elementary polynomial spline theory. *Approximation Theory (GG Lorentz et al., eds)*, Academic Press (New York), pages 269–276, 1973.
- [18] C. de Boor. *A Practical Guide to Splines*. Springer, 1978.
- [19] C. de Boor and G. Fix. Spline approximation by quasi-interpolants. *J. Approx. Theory*, 8:19–45, 1973.
- [20] T. Dupont and R. Scott. Polynomial approximation of functions in Sobolev spaces. *Mathematics of Computation*, 34:441–463, 1980.
- [21] R.G. Duran. Polynomial approximation in Sobolev spaces. *SIAM J. Numer. Anal.*, 20(5):985–988, 1983.
- [22] C. Dyken and M.S. Floater. Transfinite mean value interpolation. *Computer Aided Geometric Design*, 2007.
- [23] G.E. Farin. *NURBS for Curve and Surface Design*. Society for Industrial and Applied Mathematics Philadelphia, PA, USA, 1991.
- [24] R. Farwig. Multivariate interpolation of arbitrarily spaced data by moving least squares methods. *Journal of computational and applied mathematics*, 16(1):79–93, 1986.
- [25] R. Franke. Scattered Data Interpolation: Tests of Some Methods. *Math. Comput.*, 38(157):181–200, 1982.
- [26] D. Gilbarg and N.S. Trudinger. *Elliptic Partial Differential Equations of Second Order*. Springer, 2001.



- [27] A. Greenbaum. *Iterative methods for solving linear systems*. Society for Industrial and Applied Mathematics Philadelphia, PA, USA, 1997.
- [28] John A. Gregory and Jianwei Zhou. Filling polygonal holes with bicubic patches. *Comput. Aided Geom. Des.*, 11(4):391–410, 1994.
- [29] G. Greiner and K. Hormann. Interpolating and approximating scattered 3D-data with hierarchical tensor product B-splines. In A. Le Méhauté, C. Rabut, and L. L. Schumaker, editors, *Surface Fitting and Multiresolution Methods*, Innovations in Applied Mathematics, pages 163–172. Vanderbilt University Press, Nashville, TN, 1997.
- [30] W. Hackbusch. *Theorie und Numerik elliptischer Differentialgleichungen*. Teubner Stuttgart, 1986.
- [31] H. Hagen, T. Schreiber, and E. Gschwind. Methods for surface interrogation. In *Visualization, 1990. Visualization'90., Proceedings of the First IEEE Conference on*, pages 187–193, 1990.
- [32] K. Höllig. *Finite Element Methods with B-Splines*. Society for Industrial and Applied Mathematics, Philadelphia, PA, USA, 2003.
- [33] K. Höllig and U. Reif. Nonuniform web-splines. *Comput. Aided Geom. Des.*, 20(5):277–294, 2003.
- [34] K. Höllig, U. Reif, and J. Wipper. B-spline approximation of Neumann problems. *Preprint*, 2:2001, 2001.
- [35] K. Höllig, U. Reif, and J. Wipper. Weighted extended B-spline approximation of Dirichlet problems. *SIAM Journal on Numerical Analysis*, pages 442–462, 2002.
- [36] J. Hoschek and D. Lasser. *Fundamentals of Computer Aided Geometric Design*. AK Peters, Ltd., 1993.
- [37] K. Höllig, U. Reif, and J. Hahn. Smooth filling of  $n$ -sided holes. (Glattes Füllen  $n$ -seitiger Lücken.). *Hoffmann, Karl-Heinz (ed.) et al., Mathematik: Schlüsseltechnologie für die Zukunft. Verbundprojekte zwischen Universität und Industrie.*, 1997.
- [38] K. Jetter, J. Stöckler, and J. D. Ward. Error estimates for scattered data interpolation on spheres. *Math. Comp.*, 68:733–747, 1999.
- [39] J.T. King. New error bounds for the penalty method and extrapolation. *Numerische Mathematik*, 23(2):153–165, 1974.

- [40] M.J. Lai and L.L. Schumaker. On the approximation power of bivariate splines. *Adv. Comput. Math.*, 9:251–279, 1998.
- [41] A. Levin. Combined subdivision schemes for the design of surfaces satisfying boundary conditions. *Computer Aided Geometric Design*, 16(5):345–354, 1999.
- [42] A. Levin. Filling  $n$ -sided holes using combined subdivision schemes. *Curve And Surface Design*, pages 221–228, 1999.
- [43] Yaron Lipman. Stable moving least-squares. *Journal of Approximation Theory*, In Press, 2008.
- [44] F.J. Narcowich, J.D. Ward, and H. Wendland. Sobolev error estimates and a Bernstein inequality for scattered data interpolation via radial basis functions. *Constructive Approximation*, 24(2):175–186, 2006.
- [45] B. Mökner. *B-Splines als Finite Elemente*. PhD thesis, TU Darmstadt Fachbereich Mathematik, 2006.
- [46] C. Neumann. Gewichtsfunktionen für WEB-Splines auf Gebieten mit glattem Rand, 2006. Diplomarbeit an der TU-Darmstadt.
- [47] V. Rayevskaya and L.L. Schumaker. Multi-sided macro-element spaces based on Clough–Tocher triangle splits with applications to hole filling. *Computer Aided Geometric Design*, 22(1):57–79, 2005.
- [48] V.L. Rvachev and T.I. Sheiko. R-functions in boundary value problems in mechanics. *Appl. Mech. Rev*, 48(4):151–188, 1995.
- [49] V.L. Rvachev, T.I. Sheiko, V. Shapiro, and I. Tsukanov. Transfinite interpolation over implicitly defined sets. *Computer Aided Geometric Design*, 18(3):195–220, 2001.
- [50] I.J. Schoenberg. Contributions to the problem of approximation of equidistant data by analytic functions. *Q. Appl. Math.*, 4:45–99 and 112–141, 1946.
- [51] L.L. Schumaker. Two-Stage Spline Methodes for Fitting Surfaces. *R. Schaback, K. Scherer, eds. Quantitative Approximation. Lecture Notes 501, Springer, Berlin Heidelberg New York*, pages 378–389, 1976.
- [52] L.L. Schumaker. *Spline Functions: Basic Theory*. John Wiley and Sons, New York, 1981.
- [53] G.H. Shortley and R. Weller. The numerical solution of Laplace’s equation. *Journal of Applied Physics*, 9:334, 1938.

- [54] W.G. Strang and G.J. Fix. *Analysis of the finite element method*. Prentice-Hall, 1973.
- [55] M. Szilvasi-Nagy. Filling Holes with B-spline Surfaces. *Journal for Geometry and Graphics*, 6(1):83–98, 2002.
- [56] M. von Golitschek. Norms of projectors onto spaces with riesz bases. *J. Comput. Appl. Math.*, 119(1-2):209–221, 2000.
- [57] M. von Golitschek and L.L. Schumaker. Bounds on projections onto bivariate polynomial spline spaces with stable local basis. *Constr. Approx.*, 18:241–254, 2002.
- [58] H. Wendland. Local polynomial reproduction and moving least squares approximation. *IMA Journal of Numerical Analysis*, 21(1):285–300, 2001.
- [59] H. Wendland. *Scattered Data Approximation*. Cambridge University Press, 2005.
- [60] Z.M. Wu and R. Schaback. Local error estimates for radial basis function interpolation of scattered data. *IMA J. Numer. Anal.*, 13(1):13–27, 1993.
- [61] T. Zhou and D. Han. A weighted least squares method for scattered data fitting. *J. Comput. Appl. Math.*, 217(1):56–63, 2008.



## Wissenschaftlicher Werdegang

	<b>Jennifer Susanne Mae Prasiswa</b>
15.01.1980	* in Wuppertal
1986-1999	Schulbesuch in Frankfurt am Main, São Paulo und Lissabon
1999	Abitur am <i>Friedrich-Dessauer-Gymnasium</i> in Frankfurt am Main
1999-2004	Studium an der <i>TU Darmstadt</i>
2001-2002	Auslandsstudium im Erasmus-Programm am <i>Imperial College</i> in London
2002	Bachelor in <i>Mathematics with Computer Science</i> an der <i>TU Darmstadt</i>
2004	Diplom in Mathematik mit Nebenfach Informatik an der <i>TU Darmstadt</i>
seit 2005	Wissenschaftliche Mitarbeiterin an der <i>TU Darmstadt</i>